

177

FORTSCHRITTE DER PHYSIK

HERAUSGEGEBEN IM AUFTRAGE DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

IN DER

DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK

VON RUDOLF RITSCHL UND ROBERT ROMPE

BAND 9 · HEFT 1 · 1961



AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

INHALT

	Seite
R. HAGEDORN: Neue Methoden in der statistischen Theorie der Teilchen- erzeugung bei 1—100 GeV Primärenergie	1
V. S. BARASHENKOV: Inelastic Interactions between High Energy Particles	29
V. S. BARASHENKOV: Small Angle Elastic Scattering of High Energy Particles	42

Die „FORTSCHRITTE DER PHYSIK“ sind durch den Buchhandel zu beziehen.
Falls keine Bezugsmöglichkeit durch eine Buchhandlung vorhanden ist, wenden
Sie sich bitte

in der Deutschen Demokratischen Republik

an den AKADEMIE-VERLAG, GmbH., Berlin W 8, Leipziger Straße 3—4

in der Deutschen Bundesrepublik

an die Auslieferungsstelle: KUNST UND WISSEN, Inhaber Erich Bieber,
Stuttgart S, Wilhelmstraße 4—6

bei Wohnsitz im Ausland

an den Deutschen Buch-Export und -Import, GmbH., Leipzig C 1, Post-
schließfach 276

oder direkt an den AKADEMIE-VERLAG, GmbH., Berlin W 8, Leipziger
Straße 3—4.

1127B

Neue Methoden in der Statistischen Theorie der Teilchenerzeugung bei 1-100 GeV Primärenergie

R. HAGEDORN
CERN, Genf

Inhalt

A. Einleitung. Die Fermische Idee und die Schwierigkeiten in ihrer Durchführung . . . 1
B. Ableitung der statistischen Theorie aus der S-matrix. 6
C. Rechenmethoden: Berechnung der Phasenraumintegrale mit Hilfe einer Monte-Carlo-Methode. 15
Auswertung und Reduktion der berechneten Spektren und Phasenraumintegrale auf physikalische Aussagen 19
D. Anwendungen. Vergleich mit verschiedenen Experimenten 20
E. Diskussion. Grenze der Theorie und laufende Untersuchungen. 23
Literatur 28

A. Einleitung

Die Fermische Idee und die Schwierigkeiten in ihrer Durchführung.
Man kennt zur Zeit folgende Elementarteilchen:

$\Xi^{-,0}$	und sein Antiteilchen	$\bar{\Xi}^{+,0}$	} Hyperonen
$\Sigma^{+,0,-}$	„ „ „	$\bar{\Sigma}^{-,0,+}$	
Λ^0	„ „ „	$\bar{\Lambda}^0$	
$N^{+,0}$	„ „ „	$\bar{N}^{-,0}$	
$K^{+,0}$	„ „ „	$\bar{K}^{-,0}$	Schwere Mesonen
$\pi^{+,0,-}$	$(\pi^+$ ist Antiteilchen von π^- ; π^0 ist sein eigenes Antiteilchen)		
$\mu^{+,-}$	$(\mu^+$ ist Antiteilchen von μ^-)		
$e^{+,-}$	$(e^+$ ist Antiteilchen von e^-)		
$\nu, \bar{\nu}$	$(\nu$ und $\bar{\nu}$ sind verschieden, wenn Lepton-Erhaltung gilt)		
γ	(ist sein eigenes Antiteilchen)		

Gelegentlich wird die Existenz weiterer Elementarteilchen diskutiert, entdeckt wurde bisher keines.
Die Hauptsache ist, die Eigenschaften der bekannten Teilchen näher zu studieren und eventuell neue Teilchen zu finden. Diese Aufgabe stößt auf Schwierigkeiten:
— Erstens gibt es noch keine Theorie, die es gestatten würde, die Existenz und die Eigenschaften gerade dieser Teilchen zu verstehen,
— zweitens sind die meisten von ihnen instabil und man muß sie entweder in der kosmischen Strahlung beobachten oder sie künstlich erzeugen. In jedem Falle

entstehen sie bei Zusammenstößen energiereicher Teilchen und dabei werden im allgemeinen gleich mehrere zugleich erzeugt. Das bedeutet, daß man es mit einem Mehrkörperproblem zu tun hat.

Die Behandlung dieser Aufgabe ist aus zwei Gründen wünschenswert:

1. Man möchte die Vielfacherzeugung von Elementarteilchen in Hochenergieprozessen um ihrer selbst willen verstehen. Dabei werden die bekannten Teilchen mit ihren Eigenschaften als gegeben angesehen.
2. Man möchte die Eigenschaften der einzelnen Teilchen und ihre Wechselwirkungen miteinander unter günstigen Versuchsbedingungen beobachten. Dazu braucht man Beschleuniger (Linearbeschleuniger, Cyclotron, Synchrocyclotron, Synchrotron), die energiereiche Primärteilchen auf — wenn möglich — Protonen schießen. Dann finden die oben erwähnten Vielfacherzeugungsprozesse statt und alle Sorten von Teilchen verlassen das Target (d. h. das beschossene Stück Materie). Wenn die Theorie der Vielfacherzeugung zu berechnen gestattet, wieviele Teilchen jeder Sorte entstehen und welche Energie- und Winkelverteilung sie im Laborsystem haben, so gibt sie dem Experimentalphysiker ein Mittel in die Hand, optimale Versuchsbedingungen für weitere Untersuchung zu schaffen.

Selbstverständlich schließt die Erledigung des ersten Punktes die des zweiten ein. Leider ist man noch weit entfernt davon, die Vielfacherzeugung restlos zu verstehen. Trotzdem weiß man im Gebiet der Primärenergien zwischen 1 GeV und 100 GeV soviel, daß man wenigstens teilweise die beiden Anliegen erfüllen kann. Ein Mittel hierzu ist die statistische Theorie der starken Wechselwirkungen. Diese Theorie wurde erstmals von E. FERMI [1] vorgeschlagen, jedoch nach einigen (qualitativen) Anfangserfolgen als unzuverlässig beiseite gelegt. Erst nach einigen Jahren wurde sie wieder aufgegriffen und von mehreren Autoren so verbessert, daß sie heute verschiedene Fragen quantitativ beantworten kann. Die statistische Theorie beschreibt Produktion (und Vernichtung) derjenigen Elementarteilchen, die starke Wechselwirkung untereinander haben. In der obigen Liste sind das alle von Ξ bis π , während die übrigen Teilchen sowohl an die oberen als auch untereinander schwach oder elektromagnetisch gekoppelt sind. Wir werden uns auf die stark wechselwirkenden Teilchen beschränken. Ferner sollen hier nur Methoden besprochen werden, die im Gebiet von etwa 1—100 GeV (Lab) benutzt werden können. Für extrem hohe Energien ($> 10^3$ GeV) verweisen wir auf den kürzlich erschienenen zusammenfassenden Bericht [2].

Unsere Einheiten sind: $\hbar = c = 1$; Nukleonenmasse $M = 1$. Dann gibt es nur die Dimensionen [Länge] und [Länge] $^{-1}$.

Die Fermische Idee war, daß beim Zusammenstoß etwa zweier hochenergetischer Protonen sich in sehr kurzer Zeit (etwa $1/\mu$, wenn μ die Masse des π -Mesons ist) und in sehr kleinem Volumen (etwa $(4\pi/3)(1/\mu)^3 \approx$ Nukleonvolumen) ein Gleichgewicht zwischen den möglichen Endzuständen einstellt. Wenngleich im ersten Augenblick der Kollision nur Materie (ohne weitere Struktur) in dem kleinen Volumen existiert, so soll doch nach der Zeit $1/\mu$ eine Struktur sich gebildet haben, die es erlaubt, von Teilchenzahlen und Impulsen zu sprechen. Wenn das kleine Volumen, in dem die Wechselwirkung stattgefunden hat, verlassen wird, ist diese Struktur vollständig festgelegt. Betrachten wir eine bestimmte Reaktion:

$$p + p \rightarrow N + N + n\pi. \quad (1)$$

Das heißt: Beim Zusammenstoß zweier Protonen entstehen zwei Nukleonen und n Pionen. Die Ladungsverteilung soll uns im Augenblick nichts angehen. Im Endzustand ist n festgelegt, ebenso sind es die Impulse aller Teilchen. Aber bei mehrfacher Durchführung desselben Experiments werden diese Daten immer wieder anders ausfallen. FERMI geht nun davon aus, daß (ähnlich wie in der statistischen Mechanik) die Wahrscheinlichkeit eines Endzustandes proportional ist der Anzahl der Möglichkeiten, ihn zu verwirklichen. Diese ist gegeben durch die Anzahl der quantenmechanischen Zustände, die dem gleichen Endzustand angehören.

(Im Sinne der Quantenmechanik ist das, was hier Endzustand genannt wird, noch eine Zusammenfassung von vielen quantenmechanischen Zuständen).

Schließlich ist, wenn man die Teilchen durch ebene Wellen beschreibt, die Anzahl der Zustände in einem Normierungsvolumen V gegeben durch die Anzahl von ebenen Wellen, die die Randbedingungen erfüllen. Bekanntlich erhält man diese Zahl auf einfache Weise, indem man das ganze Phasenraumvolumen (zwischen den Energieschalen E_0 und $E_0 + \Delta E$; E_0 ist die festgehaltene Gesamtenergie)

$$V^{n+2} \cdot \iiint \dots \int d p_1 \dots d p_{n+2}$$

$$E_0 \leq E \leq E_0 + \Delta E$$

durch die Größe der Zellen $h^{3(n+2)} = (2\pi)^{3(n+2)}$ (da $\hbar = 1$) dividiert.

Da der Endzustand bereits festliegt, sobald die Teilchen ein Volumen der Größenordnung $(4\pi/3)(1/\mu)^3$ verlassen, sollte man $V \approx (4\pi/3)(1/\mu)^3$ setzen¹⁾. FERMI argumentiert weiter, daß die Impulserhaltung die Zahl der Freiheitsgrade um eins vermindert und gelangt so zur Aussage

$$P_n \propto \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3(n+1)} \cdot \left(\frac{4\pi}{3} \frac{1}{\mu^3}\right)^{n+1} \cdot \int \delta(E - \sum \varepsilon_i) d p_1 \dots d p_{n+1}. \quad (2)$$

wo P_n die Wahrscheinlichkeit für das Entstehen von n Pionen und $\varepsilon_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2}$ die Energie des i -ten Teilchens ist. Im Abschnitt B dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß man zu einer prinzipiell ähnlichen Formel mit Hilfe der S -Matrixtheorie kommen kann. Dabei ergeben sich von selbst Verfeinerungen und eine vertiefte Einsicht. Wir wollen daher hier nicht versuchen, die intuitive Begründung, die soeben gegeben wurde, zu verbessern. Stattdessen sollen einige Ursachen (und ihre Beseitigung) dafür erwähnt werden, daß (2) sich nicht sonderlich gut bewährt hat. Diese Ursachen sind von mehreren Autoren beseitigt worden und es hat immerhin einige Jahre gedauert, bevor die verbesserte Theorie erfolgreich war:

1. Es ist möglich, daß auch nach Verlassen des Wechselwirkungsvolumens $(4\pi/3)(1/\mu)^3$ noch gewisse Wechselwirkungen weiterbestehen: Resonanzzustände oder mit anderen Worten äußerst kurzlebige instabile „Teilchen“, die durch starke Wechselwirkung in Zeiten zerfallen, welche nur wenig länger sind als die „Elementarzeit“ $1/\mu$. Diese „Teilchen“ spielen aber bei der Einstellung des „Gleichgewichts“ vorübergehend die Rolle eines echten Teilchens und sind als ein solches zu behandeln [3, 4, 5, 6].

¹⁾ Dieses Argument stammt nicht von FERMI und wird hier nur zur Plausibilitätsbetrachtung benutzt. Später wird es durch ein besseres ersetzt werden.

2. Die oben erwähnten sehr instabilen Teilchen sind nicht beobachtbar. Man muß ihren Zerfall berücksichtigen und die Zerfallsprodukte (und deren Spektren) zum Endzustand hinzufügen. Das gleiche gilt für andere instabile Teilchen, die auf Grund elektromagnetischer ($\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ etc) oder schwacher Wechselwirkungen zerfallen, falls sie — wie das π^0 — überhaupt nicht beobachtbar sind oder falls man sich gerade für die Zerfallsprodukte (etwa Neutrinos) interessiert [3, 6, 7].
3. Wenn Teilchen-Antiteilchenpaare gebildet werden, können solche Paare das Wechselwirkungszentrum mit so kleinem Relativimpuls verlassen, daß sie lange beieinander bleiben und sich später gegenseitig vernichten. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist berechenbar [8] und der beobachtbare Endzustand kann entsprechend korrigiert werden.
4. Die Erhaltung des isobaren Spins und die Ununterscheidbarkeit gleicher Teilchen muß streng berücksichtigt werden. Dabei treten Faktoren auf, die leicht sehr groß werden und die relativen Verhältnisse der Wahrscheinlichkeiten vollständig verändern können. Unter Annahme der Ladungsunabhängigkeit kann man diese Faktoren berechnen [9, 10, 19].
5. Das in (2) auftretende Integral bekommt, wenn man die Impulserhaltung nicht durch Weglassen einer Integration, sondern streng berücksichtigt, für n Teilchen die allgemeine Form

$$\varrho^*(E, m_1 \dots m_n, \mathbf{P}) = \int \delta(E - \sum \varepsilon_i) \delta(\mathbf{P} - \sum \mathbf{p}_i) d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_n.$$

Es läßt sich nur für $n \leq 3$ streng ausführen [11]. Für $n > 3$ kann man es für jeden der beiden Grenzfälle

$$\text{a) } m_i \gg p_i; \varepsilon_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \approx m_i + \frac{p_i^2}{2m_i} \quad (\text{unrelativistisch})$$

$$\text{b) } m_i \ll p_i; \varepsilon_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \approx p_i \quad (\text{ultrarelativistisch})$$

exakt lösen. Hat man ein System mit schweren (Nukleonen) und leichten (Mesonen) Teilchen, so liegt die Versuchung nahe, für die schweren Teilchen Fall a) und für die leichten b) anzunehmen und ferner zu glauben, daß jedes System für sich (im Schwerpunktsystem aller Teilchen) Gesamtimpuls Null habe und die Totalenergie sich so auf beide Teilchengruppen verteile, daß $E_1 + E_2 = E$ und $E_{\text{kin},1} = E_{\text{kin},2}$ ist. Man hätte dann etwa (M heißt: große Massen)

$$\varrho^* \approx \varrho_M^* (E_1, P=0) \times \varrho_{m=0}^* (E_2, P=0),$$

und in der Tat ist diese Näherung, die grobfalsch ist, gelegentlich benutzt worden. Besser wäre es schon (bei der gleichen Näherung für $\varepsilon = \sqrt{p^2 + m^2}$) wenigstens nicht anzunehmen, daß die beiden Teilsysteme Energie und Impuls in so spezieller Weise untereinander aufteilen. Dann hätte man über alle möglichen Verteilungen zu integrieren und erhielte

$$\varrho^* \approx \int dE' d\mathbf{P}' \varrho_M^* (E - E', \mathbf{P}' - \mathbf{P}) \cdot \varrho_{m=0}^* (E', \mathbf{P}').$$

Es konnte gezeigt werden [12], daß auch diese vielbenutzte Näherung leicht vollkommen falsch werden kann; die Abweichungen vom exakten Wert

können ohne Weiteres einen Faktor Fünf erreichen. Das liegt daran, daß sich in Wirklichkeit die Teilchenimpulse im Mittel so einstellen, daß weder a) noch b) eine gute Näherung ergeben. Ferner wirkt sich ungünstig aus, daß nur die schweren Teilchen mit ihren Massen explizite eingehen, während die leichten alle die Masse Null erhalten. Zu welcher Gruppe man die K-Mesonen zählen soll, bleibt fraglich.

Wenn man nun schon intermediäre instabile Teilchen einführen und auch die Produktion von K-Mesonen und Hyperonen berechnen will, so muß man, da sich bezüglich des Phasenraumintegrals ϱ^* diese Teilchen *nur* durch ihre Massen unterscheiden, schon zu besseren Methoden greifen und ϱ^* exakt oder wenigstens so genau berechnen, daß die Massenunterschiede richtig berücksichtigt werden. Dies wurde durch eine Sattelpunktmethode [13] und durch eine Reihenentwicklung [3] versucht. Eine Methode, die weiter unten ausführlicher beschrieben wird, benutzt eine elektronische Rechenmaschine und ein Monte-Carlo-Verfahren [12, 14], wobei die exakten Ausdrücke $\varepsilon = \sqrt{p^2 + m^2}$ benutzt werden. Dies hat gegenüber den anderen Techniken den Vorteil, daß man bis zu 16 Teilchen im Endzustand haben kann, deren Massen auf 10^4 verschiedene, beliebige Werte verteilt sein können. Gleichzeitig mit ϱ^* erhält man die Energiespektren aller Massen und eine Fehlerabschätzung. Man läßt die Maschine solange rechnen, bis ein vorgeschriebener Fehler unterschritten ist. Einige Prozent wahrscheinlicher Fehler gegenüber dem exakten Wert werden in wenigen Minuten Rechenzeit erreicht (CERNs Ferranti-Mercury Computer).

6. Da nicht alle „starken“ Wechselwirkungen gleich stark sind, ist es zweckmäßig, verschiedene Wechselwirkungsvolumen $\Omega_1, \Omega_2 \dots$ einzuführen [15, 8].
7. Wenn man sich bei gegebener Gesamtenergie alle energetisch möglichen und mit Auswahlregeln (Isospinerhaltung, Baryonerhaltung, Strangeness-Erhaltung) verträgliche Endzustände (definiert durch Teilchenzahlen) aufschreibt, also etwa

$$\begin{array}{l}
 p + p \rightarrow \begin{array}{l} N + N + 2\pi \\ N + \Sigma + K + \pi \\ N + \bar{N} + N + \Lambda + K + 3\pi \end{array} \\
 \text{etc.,}
 \end{array}$$

so sieht man leicht, daß die Zahl der möglichen Endzustände mit wachsender Gesamtenergie stark zunimmt. Zählt man nur diejenigen, die nennenswert beitragen, so findet man etwa für p-p-Stöße

10 Endzustände bei	2.75 GeV Primärenergie (Laborsystem)		
50 „ „	6.2 GeV „ „		
600 „ „	25. GeV „ „		

Jeder solche Endzustand enthält im allgemeinen 3 bis 6 Teilchen verschiedener Masse und zu jeder Masse gehört als Ergebnis der Monte-Carlo-Rechnung ein Energiespektrum, welches (als Histogramm) etwa 30 Zahlen enthält. Im 25 GeV Fall hat man rund $600 \cdot 5 = 3000$ Spektren zu je 30 Zahlen. Diese

¹⁾ Die Zahlen 16 und 10 sind nicht durch die Monte-Carlo-Methode bestimmt, sondern durch das gewählte Rechenprogramm. Sie können im Prinzip erhöht werden, aber das ist praktisch unnötig.

Spektren müssen mit den Wahrscheinlichkeiten der Endzustände, zu denen sie gehören, multipliziert und dann, nach Teilchen geordnet, überlagert werden, um die Gesamtspektren der verschiedenen Teilchensorten zu ergeben. Das ist eine Aufgabe, die nicht am Schreibtisch erledigt werden kann. Häufig hat man daher einfach einen Teil der Endzustände fortgelassen und mittlere Teilchenzahlen und Spektren aus wenigen, als typisch angesehenen Endzuständen berechnet. Dabei können, abgesehen von unzulässigen Näherungen für ρ^* und Nichtbeachtung anderer statistischer Faktoren (Isospin, Ununterscheidbarkeit, Spin), weitere beträchtliche Fehler entstehen. Beispiel: Man findet für 25 GeV p-p-Stöße für die mittlere Pionenerzeugung¹⁾

- 5.35 wenn nur Endzustände $2N + n\pi$ betrachtet werden,
- 4.23 wenn Nukleon-Paarerzeugung hinzugenommen wird,
- 3,37 wenn alle beitragenden Endzustände zählen.

Entsprechend ändern sich die Pion-Spektren.

Wenn man einigermaßen zuverlässige Aussagen haben will — oder besser: Wenn man die wirklichen Aussagen der statistischen Theorie haben will, muß man alle wesentlich beitragenden Endzustände einschließen. Dabei stellt sich im allgemeinen erst beim Rechnen heraus, welche Zustände mitzunehmen sind. Die oben angegebenen Zahlen sind beim Durchrechnen der betreffenden Fälle praktisch ermittelt worden.

Damit steht aber fest, daß für mehr als 3 GeV Primärenergie die Auswertung (d. h. die gewogene Überlagerung der Spektren) mittels elektronischer Rechenmaschinen erfolgen muß. Ein Programm, welches das automatisch und sehr flexibel durchführt [16, 17], wird weiter unten in großen Zügen beschrieben.

8. Es ist wünschenswert, die statistische Theorie soweit irgend möglich von modellmäßigen Vorstellungen zu befreien. Man wird also versuchen, von der S -Matrix her eine neue Begründung zu finden [18]. Dabei müssen sich die oben erwähnten weiteren statistischen Faktoren von selbst einstellen und das Wechselwirkungsvolumen eine bessere Interpretation erfahren.

Freilich zeigt sich, daß Modellvorbestellungen nicht ganz zu vermeiden sind — eine triviale Folge der Tatsache, daß im Gebiet der starken Wechselwirkungen keine Feldtheorie bisher in der Lage war, S -Matrixelemente explizite zu berechnen.

Im folgenden Abschnitt B soll die Neubegründung der statistischen Theorie ausgehend von der S -Matrix kurz geschildert werden. Dabei werden die Punkte 1, 2, 3, 4 und 6 der obigen Aufzählung automatisch mit erledigt.

Im Abschnitt C wird einiges über die Rechenmethoden gesagt, womit die Punkte 5 und 7 der obigen Liste ebenfalls behandelt sind.

Endlich werden einige Anwendungen und im Fluß befindliche Weiterentwicklungen gestreift (Abschnitt D).

B. Ableitung der statistischen Theorie aus der S -matrix

Die folgenden Ausführungen sollen nur einen Überblick geben. Für Einzelheiten siehe [18].

¹⁾ Diese Zahlen sind nicht für Paarvernichtung im Endzustand korrigiert, sie dienen nur zur Illustration.

Die Wahrscheinlichkeit, von einem Anfangszustand $|i\rangle$ in irgendeinen einer Menge F von Endzuständen zu gelangen, ist gegeben durch

$$P(F) = \sum_{f \in F} |\langle f | S | i \rangle|^2, \quad (4)$$

wobei ein konstanter Faktor weggelassen wurde. Wenn wir die Endzustände $\langle f |$ durch die Massen und Impulse sowie Spins und Isospins der herauskommenen Teilchen charakterisieren, so folgt (T_i, t_i sind Isospin und dessen dritte Komponente)

$$P(F) = \sum_F \int |\langle T_1 t_1 \dots T_n t_n, \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n, m_1 \dots m_n | S | i \rangle|^2 d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_n. \quad (5)$$

Man kann das quadrierte Matricelement „reduzieren“, indem man von der Isospinerhaltung Gebrauch macht:

$$\begin{aligned} |\langle T_1 t_1 \dots T_n t_n, \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n, m_1 \dots m_n | S | i \rangle|^2 &= \\ &= |C_T(T_1 \dots T_n, t_1 \dots t_n)|^2 \cdot |\langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n, m_1 \dots m_n | S' | i \rangle_{T_1 \dots T_n}|^2, \end{aligned} \quad (6)$$

wo $C_T(T_1 \dots T_n)$ ein wohldefinierter Koeffizient ist. Indem man auf die Kenntnis der Ladungsverteilung verzichtet (was aber nicht sein muß, siehe [7, 19]) kann man über alle möglichen t_i -Konfigurationen summieren (das ist mit dem Summenzeichen in (5) gemeint) und erhält die Gesamtzahl von Möglichkeiten, aus n Teilchen mit Isospins $T_1 \dots T_n$ eine Isospineigenfunktion $|T, t\rangle$ zu konstruieren, wo T, t den Isospin des Anfangszustandes i charakterisieren. Da uns hier nur Teilchen mit Isospins $T = 0, 1/2, 1, 3/2$ interessieren und die ($T = 0$)-Teilchen keinen Einfluß haben, nennen wir diese Anzahl von Möglichkeiten [9, 10, 19]

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta\gamma}(T); \alpha &= \text{Zahl der Teilchen mit Isospin } 1/2 \\ \beta &= \text{Zahl der Teilchen mit Isospin } 1 \\ \gamma &= \text{Zahl der Teilchen mit Isospin } 3/2 \\ T &= \text{Isospin des Anfangszustandes.} \end{aligned}$$

Ferner ziehen wir eine δ -Funktion für Energie- und Impulserhaltung aus dem quadrierten Matricelement heraus und finden

$$P(F) = W_{\alpha\beta\gamma}(T) \int |\langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n, m_1 \dots m_n | S'' | i \rangle|^2 \delta(E - \sum \varepsilon_i) \delta(\sum \mathbf{p}_i) d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_n, \quad (7)$$

wobei wir die relativistische Invarianz der S -Matrix benutzt haben, um ein für allemal in das Schwerpunktsystem $\sum \mathbf{p}_i = 0$ zu gehen.

Da $P(F)$ und $W_{\alpha\beta\gamma}(T)$ dimensionslos sind, aber die δ -Funktionen und die Differentiale $d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_n$ nicht, muß das verbleibende quadrierte Matricelement die Dimension $\Delta E \cdot V_0^{n-1}$ haben, wo ΔE eine Energie und V_0 ein Normierungsvolumen ist, das später wieder herausfallen muß, da seine Größe irrelevant ist. Diese Faktoren ziehen wir heraus, um wieder ein dimensionsloses quadriertes Matricelement zu haben:

$$P(F) = W_{\alpha\beta\gamma}(T) \cdot \Delta E \cdot V_0^{n-1} \int |\langle \mathbf{p}_1 \dots | S''' | i \rangle|^2 \delta(E - \sum \varepsilon_i) (\sum \mathbf{p}_i) d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_n. \quad (8)$$

Jetzt berücksichtigen wir noch die möglichen Spineinstellungen durch den Faktor

$$\prod_{j=1}^n (2J_j + 1),$$

wo J_j der Spin des j -ten Teilchens ist¹⁾. Ferner müssen wir die Ununterscheidbarkeit gleicher Teilchen in Rechnung stellen. Beim Integrieren kommen alle Permutationen vor und infolgedessen werden alle Zustände mehrfach gezählt. Das kompensieren wir durch einen Faktor

$$\frac{1}{\prod_i N_i!},$$

wo $N_1 \dots N_k$ die Anzahlen der Teilchen der Sorten $1 \dots k$ sind ohne Ansehen von Spin und Ladung (etwa $N_1 =$ Zahl aller Pionen).

Das ergibt (wir setzen $V_0 = \frac{V}{(2\pi)^3}$)

$$P(F) = \frac{\prod_j (2J_j + 1)}{\prod_i N_i!} W_{\alpha\beta\gamma}(T) \cdot \left[\frac{V}{(2\pi)^3} \right]^{n-1} \cdot \Delta E \times \\ \times \int |\langle \mathbf{p}_1 \dots | S''' | i \rangle|^2 \delta(E - \Sigma \varepsilon_i) \delta(\Sigma \mathbf{p}_i) d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_n \quad (9)$$

Wir setzen zur Abkürzung vorübergehend für den Faktor vor dem Integral

$$C = \frac{\prod_{j=1}^n (2J_j + 1)}{\prod_i N_i!} \cdot W_{\alpha\beta\gamma}(T) \cdot \left[\frac{V}{(2\pi)^3} \right]^{n-1} \cdot \Delta E \quad (10)$$

und nehmen an, wir wollten das Spektrum des n -ten Teilchens berechnen. Man erhält es offenbar durch Nichtausführung der betreffenden Integration, ($d\mathbf{p}_n = 2\pi p_n^2 d p_n \sin \vartheta_n \cdot d\vartheta_n$, die Polarachse sei durch das ankommende Primärteilchen gegeben):

$$P(F, \mathbf{p}_n) d\mathbf{p}_n = 2\pi C p_n^2 \sin \vartheta_n d p_n d\vartheta_n \int |\langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n | S''' | i \rangle|^2 \delta(E - \Sigma \varepsilon_i) \times \\ \times \delta(\Sigma \mathbf{p}_i) d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_{n-1}. \quad (11)$$

Da wir über das quadrierte Matricelement so gut wie nichts wissen, ziehen wir seinen Mittelwert vor das Integral:

$$P(F, \mathbf{p}_n) d\mathbf{p}_n = 2\pi C p_n^2 \sin \vartheta_n d p_n \cdot d\vartheta_n \cdot S(E, T, \eta_1 \dots, T_1 \dots T_n, p_n, \vartheta_n) \times \\ \times \int \delta(E - \varepsilon_n - \Sigma' \varepsilon_i) \delta(\mathbf{p}_n + \Sigma' \mathbf{p}_i) d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_{n-1} \quad (12)$$

Die Funktion S ist der erwähnte Mittelwert, $\eta_1, \eta_2 \dots$ sind alle anderen Parameter, die den Mittelungsprozess überlebt haben. Wenn wir S als Funktion aller Varia-

¹⁾ Warum Spin und Isospin verschieden behandelt werden, ist in [18] ausführlich diskutiert. Der im allgemeinen große Bahndrehimpuls ist die Ursache.

blen berechnen könnten, wären wir in der Lage, die Wahrscheinlichkeit dafür anzugeben, daß genau die Teilchen $1, 2 \dots n$ (mit Massen $m_1 \dots m_n$, Spin und Isospin $J_1 \dots J_n$ bzw. $T_1 \dots T_n$) entstehen und daß das Teilchen mit der Nummer n einen Impuls zwischen p_n und $p_n + d p_n$ hat und einen Winkel zwischen ϑ_n und $\vartheta_n + d \vartheta_n$ mit der Richtung des Primärteilchens bildet.

Es kann keine Rede davon sein, daß man die Funktion S so weitgehend berechnen könnte. In der Tat ist (12) eine Aufspaltung des Problems in Faktoren, von denen die Funktion S das Wesentliche über die Wechselwirkung enthält, während alle übrigen eigentlich trivial sind. Daß die trivialen Faktoren aber den numerischen Wert von $P(F)$ weitgehend bestimmen und überdies nicht leicht zu berechnen sind, werden wir noch sehen.

Da man noch keine Möglichkeit hat, selbst für kleine Teilchenzahlen — geschweige für große — S -matricelemente explizit auszurechnen, muß man im folgenden bescheidener sein.

Zunächst wollen wir auf die Frage nach der Winkelverteilung verzichten, indem wir über den Winkel ϑ_n integrieren. Das hat zur Folge, daß kein Widerspruch zwischen den Aussagen der Theorie und einer beobachteten Winkelverteilung im Schwerpunktsystem bestehen kann. Ein oft gehörtes Argument gegen die statistische Theorie wird damit entkräftet: Eine isotrope Winkelverteilung wird in der hier gegebenen Begründung der statistischen Theorie weder vorausgesetzt noch gefolgert.

Zur Durchführung der Winkelintegration definieren wir

$$\varrho^*(E, m_1 \dots m_n, P) = \int \delta(E - \Sigma \varepsilon_i) (\Sigma \mathbf{p}_i - \mathbf{P}) d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_n \quad (13)$$

$$\left\{ \left[\frac{V}{(2\pi)^3} \right]^{n-1} \cdot \varrho^* \text{ ist in unseren Einheiten die Zahl der Zustände im Kasten } V \right\}$$

Da über alle \mathbf{p}_i integriert wird, kann ϱ^* offenbar von der Richtung von \mathbf{P} nicht abhängen (also auch nicht vom Vorzeichen). Schreiben wir also (12) in der Form

$$P(F, \mathbf{p}_n) d\mathbf{p}_n = 2\pi C p_n^2 d p_n \sin \vartheta_n d \vartheta_n \cdot S(E, T | m_1 \dots m_n, \dots p_n, \vartheta_n) \times \\ \times \varrho^*(E - \varepsilon_n, m_1 \dots m_{n-1}; p_n), \quad (12')$$

so bleibt ϱ^* von der Winkelintegration unberührt und wir erhalten [mit etwas veränderter Bedeutung von $P(F, p_n)$]

$$P(F, p_n) d p_n = C \bar{S}(E, T, \eta_1 \eta_2, \dots, T_1 \dots T_n, p_n) \times \\ \times \varrho^*(E - \varepsilon_n, \dots, p_n) 4\pi p_n^2 d p_n. \quad (12'')$$

Wir behaupten nun, daß dieser Ausdruck (der noch exakt richtig ist) mit Hilfe plausibler Näherungen für \bar{S} ziemlich gut berechnet werden kann. Dabei nehmen wir für den Augenblick an, C und ϱ^* seien gegeben. Wir kümmern uns nur um die Funktion \bar{S} und diskutieren die möglichen Näherungen:

α) Der Faktor $p_n^2 \cdot \varrho^*(E - \varepsilon_n, m_1 \dots m_{n-1}, p_n)$ wird zu Null für $p_n = 0$ und für $\varepsilon_n = \sqrt{p_n^2 + m_n^2} = E - (m_1 + \dots m_{n-1})$, dazwischen liegt ein Maximum. Dieser Faktor trägt der Kinematik (Energie-Impulsbilanz) und der Einschränkung der Freiheitsgrade der $(n - 1)$ restlichen Teilchen durch das n -te Rechnung. \bar{S} enthält also in seiner p_n -Abhängigkeit diese Effekte nicht mehr.

Daher scheint es plausibel, daß \bar{S} nur noch schwach von p_n abhängt und daher im Vergleich zum stark veränderlichen $p_n^2 \cdot \varrho^*$ als Konstante anzusehen ist. Wir streichen also p_n aus \bar{S} .

β) Der Faktor C [siehe (10)] zählt unter anderem die Möglichkeiten, mit n Teilchen der Isospins $T_1 \dots T_n$ und beliebigen $t_1 \dots t_n$ einen Gesamtisospin T, t zu kombinieren. Die Zahl dieser Möglichkeiten variiert stark und wir werden annehmen, daß demgegenüber \bar{S} von $T_1 \dots T_n$ nur so schwach abhängt, daß diese Variablen ebenfalls zu streichen sind. Die Abhängigkeit von T zu streichen scheint weniger geraten. Entweder man beschränkt sich auf Anfangszustände, die Isospineigenfunktionen sind (etwa pp) — dann gehören alle Endzustände zum gleichen T und ihre relativen Gewichte werden weitgehend T -unabhängig. Oder man hat gemischte Anfangszustände (pn, π^- p, p \bar{p}) — dann muß man Zusatzannahmen machen.

Wir beschränken uns auf reine Isospin-Anfangszustände und streichen T aus \bar{S} .

γ) Jetzt lautet (12''):

$$P(F) dp_n = C \bar{S}(E, \eta_1 \eta_2 \dots) \cdot 4\pi p_n^2 dp_n \cdot \varrho^*(E - \varepsilon_n, m_1 \dots m_{n-1}, p_n).$$

Um eine Abschätzung für \bar{S} zu bekommen, integrieren wir zunächst über p_n (was an \bar{S} nichts ändert). Aus (13) folgt

$$\int 4\pi p_n^2 \varrho^*(E - \varepsilon_n, m_1 \dots m_{n-1}, p_n) dp_n = \varrho^*(E, m_1 \dots m_n, 0) \quad (13')$$

$$\int P(F) dp_n \equiv P(\eta_1 \eta_2 \dots) = C S \varrho^*(\bar{E}, \eta_1 \eta_2 \dots, 0) \quad (14)$$

ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, genau n Teilchen mit den gegebenen Eigenschaften (Massen, Isospin, etc.) aus dem festgelegten Anfangszustand (E, T) zu erzeugen. Diese Wahrscheinlichkeit ist gewonnen aus der Vorschrift: Man integriere das quadrierte S -matrixelement über alle zum gewünschten Endzustand beitragenden differentiellen quantenmechanischen Zustände (Impulse, Ladungen, etc.) und diese Wahrscheinlichkeit ist in (14) geschrieben als: [Mittelwert des quadrierten Matrixelemente] mal [gesamtes Integrations (Summations) Intervall], wobei \bar{S} der Mittelwert ist.

Nun betrachten wir den inversen Prozeß: die n Teilchen des bisherigen Endzustandes sind in einem Kasten (Normierungsvolumen V) enthalten und wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie sich alle während einer Zeit der Größenordnung $1/\mu$ in einem Volumen der Größenordnung $\Omega_0 = (4\pi/3) (1/\mu^3)$ treffen und miteinander zu zwei Protonen verschmelzen, die mit hoher Energie das Gebiet der Wechselwirkung verlassen.

Da für starke Wechselwirkungen die Invarianz unter Zeitumkehr angenommen werden darf, ist das quadrierte S -matrixelement dasselbe wie beim zuerst betrachteten Prozeß. Der jetzige Endzustand (d. i. der frühere Anfangszustand) ist ein reiner Zustand, daher entfällt die Integration über Endzustände. Der jetzige Anfangszustand (d. i. der frühere Endzustand) ist aber ein Gemisch aus vielen differentiellen Zuständen (Impulse, Ladungen, etc.) über die man das

quadrierte Matricelement zu mitteln hat. Nach unseren obigen Überlegungen ist aber die Funktion $\bar{S}(E, \eta_1 \eta_2 \dots)$ genau dieser Mittelwert. Also ist

$$P_{\text{invers}} = S(E, \eta_1 \eta_2 \dots). \quad (15)$$

Elementare Statistik lehrt, daß diese Wahrscheinlichkeit proportional sein muß zu $(\Omega_0/V)^{n-1}$. Wir schreiben $n-1$, weil der Ort des Zusammentreffens innerhalb V gleichgültig ist, also nur $n-1$ Teilchen ein beliebiges treffen müssen.

Für die Energieabhängigkeit kann man folgende Annahme machen: Damit zwei Protonen von hoher Energie herauskommen, die im Schwerpunktsystem durch Lorentzkontraktion abgeplattet sind (ihr Radius in Flugrichtung ist $1/\gamma\mu$, wo $\gamma = 2/E$ und E die totale Schwerpunktsenergie ist), muß im letzten Augenblick vor ihrer „Geburt“ auch das Wechselwirkungsvolumen schon abgeplattet sein, da es aus zwei sich mit hoher Geschwindigkeit lösenden Teilvolumen besteht. Also müssen die n Teilchen sich im Volumen Ω treffen:

$$\Omega = \Omega_0 \cdot \frac{2}{E}; \quad \Omega_0 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{\mu} \right)^3; \quad E = \text{totale Schwerpunktsenergie.}$$

δ) Endlich kann man die Abhängigkeit von den Parametern $\eta_1 \eta_2 \dots$ wenigstens andeutungsweise berücksichtigen. Die Massen z. B. sind durch Wechselwirkung hervorgerufen, und verschiedenen Massen entspricht die Existenz verschiedener Wechselwirkungen mit verschiedenen Kopplungskonstanten und Reichweiten. Es liegt daher nahe, den Ausdruck $(\Omega/V)^n$ zu ersetzen

$$\left(\frac{\Omega}{V} \right)^n \rightarrow \left(\frac{\Omega_1}{V} \right) \cdot \left(\frac{\Omega_2}{V} \right) \dots$$

wo zwar die Größenordnung aller Ω_i ungefähr festliegt, aber doch Unterschiede bis etwa zu Faktoren 10 entsprechend der jeweiligen Wechselwirkung vorkommen könnten. Die obige Begründung legt es nahe, Ω als Ausdruck der Reichweite der Wechselwirkung anzusehen. Die Erfahrung zeigt aber, daß wenn man die Ω_i für alle vorkommenden Massen durch $(4\pi/3)(1/m_i)^3 \cdot 2/E$ definiert, keine Übereinstimmung mit dem Experiment erzielt werden kann. Wenn man an die Störungstheorie denkt, so würde man für jedes erzeugte Teilchen einen Faktor g_i^2 (Kopplungskonstante) erwarten und dann hätten Nukleonen, Antinukleonen und Pionen das gleiche Ω . Es erscheint daher zweckmäßig, die Ω_i als Parameter anzusehen. Wir werden, um nicht zu viele Parameter zu haben, drei verschiedene Ω zulassen und dem Ω_π den in (16) gewählten Wert geben:

$$\left(\frac{\Omega}{V} \right)^{n-1} \rightarrow \left(\frac{\Omega_1}{V} \right)^{n_1} \cdot \left(\frac{\Omega_2}{V} \right)^{n_2} \cdot \left(\frac{\Omega_3}{V} \right)^{n_3};$$

dann können wir die beiden anderen für Hyperonen, K-mesonen, Antinukleonen, Antihyperonen, gebundene Zustände wie Deuteronen, $\text{H}^3 \text{He}^3$ oder Antideuteronen usw. und eventuell Resonanzzustände (Isobaren) verwenden.

Da P_{invers} zu $(\Omega/V)^{n-1}$ proportional ist, setzen wir

$$\bar{S}(E, \eta_1 \eta_2 \dots) = A \cdot \left(\frac{\Omega_1}{V} \right)^{n_1} \cdot \left(\frac{\Omega_2}{V} \right)^{n_2} \cdot \left(\frac{\Omega_3}{V} \right)^{n_3}, \quad (16)$$

wo A noch eine — wie wir hoffen — langsam veränderliche Funktion der Energie E , der Massen und aller anderen unterdrückten Variablen ist. Wir werden A als Konstante behandeln.

Tragen wir (16) und (10) in (12'') ein, so folgt

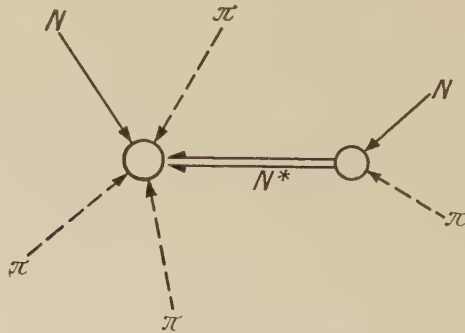
$$P(F, p_i) dp_i = \frac{\prod_l (2J_l + 1)}{\prod_k N_k!} W_{\alpha\beta\gamma}(T) \left[\frac{\Omega_1}{(2\pi)^3} \right]^{n_1} \cdot \left[\frac{\Omega_2}{(2\pi)^3} \right]^{n_2} \cdot \left[\frac{\Omega_3}{(2\pi)^3} \right]^{n_3} \times \\ \times \varrho^*(E - \varepsilon_i, m_1 \dots m_i \dots m_n, p_i) \cdot 4\pi p_i^2 dp_i \quad (17)$$

wo wir statt des n -ten Teilchens jetzt allgemeiner ein beliebiges, i , herausgegriffen haben. m_i heißt: die Masse m_i fehlt.

In (17) sind alle Größen wohldefiniert und berechenbar. Die Konstanten A und ΔE lassen wir fort, da die Wahrscheinlichkeiten ohnehin durch Division mit $\sum_F P(F)$ zu normieren sind.

Wir bemerken nun, daß instabile Teilchen, deren Lebensdauer zu kurz ist, als daß man sie beobachten könnte, aber doch hinreichend lang, um das Gebiet der Wechselwirkung vor ihrem Zerfall zu verlassen, in (17) ganz zwanglos als Teilchen eingeführt werden können. Nehmen wir als Beispiel das Nukleon-isobar (π -N Resonanz $T = J = 3/2$; $m^* \approx 1.31$). Man führt es als ein Teilchen der Masse m^* ein und berechnet sein Spektrum mit Hilfe von (17).

Man könnte für jedes derartige „Teilchen“ ein spezielles Wechselwirkungsvolumen Ω^* ansetzen, denn der inverse Prozeß kann so vorgestellt werden:



Für die Vereinigung $\pi + N \rightarrow N^*$ schreibt man Ω^* und für die Vereinigung $N + N^* + \pi + \dots + \pi$ ein weiteres Produkt von Ω 's. Wenn man nun $\Omega^* \gg \Omega_i$ wählt, kommt man zu dem von LINDENBAUM und STERNHEIMER vorgeschlagenen Isobarenmodell [6], in dem Pionen nur auf dem Weg über das Nukleon-isobar erzeugt werden. Wir wollen das nicht tun, denn bei unserer Deutung von Ω liegt dazu kein Anlaß vor. Daß eine Tendenz zur Bildung eines „Isobars“ (auch höherer Masse) besteht, wird schon von den übrigen Faktoren bewirkt.

(17) beschreibt das Energiespektrum des i -ten Teilchens im Schwerpunktsystem. Geben wir dem Nukleon-isobar (oder irgendeinem anderen instabilen Teilchen) die Nummer i , so haben wir in (17) das Spektrum der „Isobaren“. Da die Lebensdauer von der Größenordnung 10^{-22} sec ist, können nur seine Zerfallsprodukte beobachtet werden.

Nimmt man an, die „Isobaren“ mit Masse m^* seien im Schwerpunktsystem isotrop verteilt (hier *muß* eine Annahme über Winkelverteilung gemacht werden) und ihre Zerfallsprodukte mit den Massen m und μ seien im Ruhssystem des Isobars wiederum isotrop verteilt, so findet man (durch Transformation vom Ruhssystem des „Isobars“ in das Schwerpunktsystem) für das Energiespektrum der Massen m bzw. μ folgende Form [14]

$$\left\{ \begin{array}{l} w_\mu(\varepsilon) = \frac{m^*}{2k} \int_{y_0}^{y_1} dy \frac{w^*(y)}{\sqrt{y^2 + 2m^*y}} \\ y_0 = \frac{m^*}{\mu} \left[\frac{\varepsilon_\mu E}{\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_\mu E}{\mu} \right)^2 - (E^2 + k^2)} \right] - m^*; \quad E = \varepsilon + \mu. \end{array} \right. \quad (18)$$

Hier bedeuten

$w^*(y)$ das Spektrum der *kinetischen* Energie y des instabilen Teilchens der Masse m^* (welches im Prozeß $m^* \rightarrow m + \mu$ zerfällt) im Schwerpunktsystem;

$w_\mu(\varepsilon)$ das Spektrum der *kinetischen* Energie des Zerfallsprodukts der Masse μ im Schwerpunktsystem;

ε_μ die *totale* Energie des Teilchens der Masse μ im Ruhssystem des Teilchens der Masse m^* (also des Isobars);

k den Impuls von m (und μ) im Ruhssystem von m^* .

Offenbar muß man $w_\mu(\varepsilon)$ und $w_m(\varepsilon)$ zu den anderen Spektren der Teilchen μ bzw. m hinzufügen. (Man erhält $w_m(\varepsilon)$, indem man in (18) überall m mit μ vertauscht). Formel (18) ist natürlich für jeden 2-Körperzerfall brauchbar und dient infolgedessen auch zur Berechnung des γ -Spektrums in $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ und $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$. Als weitere Endzustand-Wechselwirkung kommt die Vernichtung eines zunächst gebildeten Paares $N + \bar{N}$ oder $\Sigma + \bar{\Sigma}$ oder $N + \bar{\Lambda}$ usw. in Frage. Mit Hilfe von q^* kann man ausrechnen, wie wahrscheinlich es ist, daß ein solches Paar einen Relativimpuls $\leq p_0$ hat¹⁾, der so gewählt ist, daß beide Partner der möglichen Vernichtung etwa für eine Zeit $t > 1/\mu$ einen Abstand $d < 1/\mu$ behalten, so daß die Vernichtung sehr wahrscheinlich wird. Nimmt man an, daß ein gewisser Bruchteil [etwa $\sigma \text{ Vernichtung} / \sigma \text{ total} (P_{\text{rel}})]$ solcher Paare verschwindet und die entsprechenden Mesonen dafür auftreten, so kann man die berechneten Multiplizitäten korrigieren. Die Durchführung einer solchen Rechnung ist in [8] im einzelnen dargestellt. Man findet z. B., daß bei p-p-Stößen mit 6.2 GeV Primärenergie (Laborsystem) etwa 75% und bei 25 GeV etwa 25% der gebildeten Paare sich im Endzustand wieder vernichten und daher nicht beobachtet werden.

Wir kehren zur Formel (17) zurück und stellen zusammen, was man mit ihrer Hilfe berechnen kann. Bezeichnen wir mit

F eine Reaktion, charakterisiert durch Teilchenzahlen

(etwa $P + P \rightarrow N + \Sigma + K + 5\pi$), mit

i die Teilchensorte (z. B. $i = 1, 2, 3 \dots$ entsprechen (19)

$\Xi, \bar{\Xi}, \Sigma, \bar{\Sigma} \dots \pi, \gamma$) und mit

$n_i^{(F)}$ die Zahl der Teilchen der Sorte i (etwa Pionen) in der Reaktion F (für das obige F ist $n_\pi = 5$),

¹⁾ Indem man nämlich dieses Paar als ein „Teilchen“ der Masse $(m_1 + m_2)$ mit $p_{\text{rel}}^2/2(m_1 + m_2)$ in das Phasenraumintegral aufnimmt. Beweis in [8].

so stellt (17) das (nicht normierte) Impulsspektrum der Teilchensorte i in der Reaktion F dar und die (ebenfalls nicht normierte) Wahrscheinlichkeit für die Reaktion F folgt durch Integration über p_i

$$P(F) = \frac{\prod_j (2J_j + 1)}{\prod_k N_k!} W_{\alpha\beta\gamma}(T) \cdot \prod_i \left[\frac{\Omega_i}{(2\pi)^3} \right]^{n_i} \cdot \varrho^*(E, m_1 \dots m_n, p = 0). \quad (20)$$

Dann ist

$$\frac{P(F, p_i)}{P(F)} = w_i^{(F)}(p) \quad (21)$$

das auf eins normierte Impulsspektrum des Teilchens i in der Reaktion F .

$$W_i(p) = \frac{\sum_F P(F, p_i) \cdot n_i^{(F)}}{\sum_F P_F} = \frac{\sum_F P(F) \cdot w_i^{(F)}(p) \cdot n_i^{(F)}}{\sum_F P(F)} \quad (22)$$

das totale, auf mittlere Teilchenzahl normierte Impulsspektrum der Teilchensorte i aus allen Reaktionen,

$$\int W_i(p) dp = \frac{\sum P(F) n_i^{(F)}}{\sum P(F)} = \langle n_i \rangle \quad (23)$$

die mittlere Zahl von Teilchen der Sorte i , gemittelt über alle Reaktionen, also die mittlere Multiplizität. Schließlich kann man noch mittlere Energien, etwa

$$\langle \varepsilon_{\text{kin}} \rangle_i = \int W_i(p) \cdot \varepsilon(p) dp / \langle n_i \rangle \quad (24)$$

berechnen.

Die \sum_F sind über alle Reaktionen zu erstrecken, die merklich beitragen; das Maß dafür sind die $P(F)$.

Bezeichnen wir noch mit

$$\Phi \equiv (F_1, F_2, \dots, F_k) \quad (25)$$

eine beliebig definierte Menge von Reaktionen (bei gleichem Anfangszustand), zum Beispiel alle Reaktionen in denen Antihyperonen vorkommen, so folgt

$$\frac{P(\Phi_1)}{P(\Phi_2)} = \frac{\sum_{F \in \Phi_1} P(F)}{\sum_{F \in \Phi_2} P(F)} = \frac{\sigma(\Phi_1)}{\sigma(\Phi_2)} \quad (26)$$

für das Verzweungsverhältnis zwischen zwei solchen Mengen von Reaktionen. Natürlich kann man auch in (22), (23), (24) die Summation nur über $F \in \Phi$ erstrecken und hat dann die dort definierten Größen bezogen auf eine ausgewählte Menge von Reaktionen.

C. Rechenmethoden

Abgesehen von den Summationen über alle Reaktionen F , die schon bei über 3 GeV Primärenergie (Lab.) auf Rechenautomaten durchgeführt werden müssen, gibt es nur noch ein Problem bei der Berechnung, nämlich die Ausdrücke

$$\varrho^*(E, m_1 \dots m_n, p = 0) \text{ und}$$

$$\varrho^*(E - \varepsilon_i, m_1 \dots m_i \dots m_n, p_i)$$

die in (20) bzw. (17) auftreten.

1. Berechnung der Phasenraumintegrale mit Hilfe einer Monte-Carlo-Methode

Wir geben hier nur das Prinzip, Einzelheiten findet man in [12]. Wie schon erwähnt, kann das Integral

$$\varrho^*(E, m_1 \dots m_n, P) = \int \delta(E - \sum \sqrt{p_i^2 + m_i^2}) \delta(\sum \mathbf{p}_i - P) d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_n \quad (27)$$

nur für $n < 3$ analytisch ausgeführt werden. Wollte man nun eine Art Simpson-Formel anwenden, so fände man, daß infolge der unendlichen Integrationsgrenzen und der hohen Dimensionszahl nur mit großem Rechenaufwand einige Genauigkeit zu erzielen ist. Man kann die Zahl der Integrationen auf zwei reduzieren, tauscht dafür aber sehr unbequeme Integranden ein und muß singuläre Funktionen numerisch integrieren. Unter diesen Umständen scheint eine Monte-Carlo-Methode angebracht, die wir jetzt vorbereiten:

In (27) trennen wir die Winkelintegrationen ab, indem wir setzen

$$\mathbf{p}_i = p_i \mathbf{e}_i; \quad |\mathbf{e}_i| = 1 \quad (28)$$

$$d\mathbf{p}_i \equiv p_i^2 dp_i d\mathbf{e}_i \equiv p_i^2 \sin \theta_i d\theta_i dp_i d\varphi_i,$$

dann wird

$$\begin{aligned} \varrho^*(E, m_1 \dots m_n, P) &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty dp_1 \dots dp_n p_1^2 \dots p_n^2 (E - \sum \sqrt{p_i^2 + m_i^2}) \times \\ &\times \int \dots \int_{\text{Richtungen}} \delta(\mathbf{P} - \sum p_i \mathbf{e}_i) d\mathbf{e}_1 \dots d\mathbf{e}_n. \end{aligned} \quad (29)$$

Die Funktion

$$w_n(P, p_1 \dots p_n) = \left(\frac{1}{4\pi} \right)^n \cdot \int \dots \int_{\text{Richtungen}} \delta(\mathbf{P} - \sum p_i \mathbf{e}_i) d\mathbf{e}_1 \dots d\mathbf{e}_n \quad (30)$$

hat eine einfache Bedeutung: $w_n(P, p_1 \dots p_n) d\mathbf{P}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß n Vektoren gegebener Längen $p_1 \dots p_n$ aber statistisch verteilter Richtungen $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n$ sich zu einem resultierenden Vektor $\sum \mathbf{e}_i p_i$ zusammensetzen, der in $d\mathbf{P}$ liegt. Diese Bedeutung läßt sich aus (30) unmittelbar ablesen, der Faktor $(1/4\pi)^n$ dient zur Normierung, so daß

$$\int w_n(P, p_1 \dots p_n) d\mathbf{P} = 4\pi \int_0^\infty P^2 w_n(P, p_1 \dots p_n) dP = 1. \quad (31)$$

Aus der anschaulichen Bedeutung von w_n ergibt sich ohne Rechnung

$$w_n(0, p_1 \dots p_n) = w_{n-1}(p_j, p_1 \dots p_{j-1} p_{j+1} \dots p_n); \quad j = 1 \dots n, \quad (32)$$

so daß es genügt, $w_n(0, p_1 \dots p_n)$ zu berechnen.

Durch Einführen der Fourierdarstellungen der δ -Funktionen in (30) kann man w_n analytisch ausrechnen. Man findet [12] [$\text{sg}(x) = \text{Vorzeichen von } x$]

$$w_n(0, p_1 \dots p_n) = - \frac{1}{(n-3)! 2^{n+1} \cdot \pi} \times \\ \times \frac{1}{p_1 \cdot p_2 \dots p_n} \left[\sum_{\sigma} \sigma_2 \cdot \sigma_3 \dots \sigma_n \cdot \text{sg} \left(\sum_i \sigma_i p_i \right) \left(\sum \sigma_i p_i \right)^{n-3} \right], \quad (33)$$

wobei $\sigma_i = \pm 1$ (außer $\sigma_1 \equiv 1$) und über alle 2^{n-1} möglichen Vorzeichenkombinationen $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$ zu summieren ist — eine schöne Übungsaufgabe für das Programmieren von Rechenautomaten (natürlich soll w_n in möglichst kurzer Zeit ausgerechnet werden!).

Wir sehen $w_n(P, p_1 \dots p_n)$ als gegeben an.

Durch Einführen der Energien und neuer Abkürzungen

$$\varepsilon_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2}; \quad p_i = \sqrt{\varepsilon_i^2 - m_i^2} \\ v_n(P, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) = w_n(P, p_1 \dots p_n) \quad (34) \\ u_i(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - m_i^2} & \text{für } \varepsilon > m_i \\ 0 & \varepsilon \leq m_i \end{cases}$$

erhalten wir im Schwerpunktsystem ($p = 0$) aus (29)

$$\varrho^*(\varepsilon, m_1 \dots m_n, 0) = (4\pi)^n \int_{m_1}^{\infty} d\varepsilon_1 \dots \int_{m_n}^{\infty} d\varepsilon_n u_1(\varepsilon_1) \dots u_n(\varepsilon_n) v_n(0, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) \cdot \delta(E - \sum \varepsilon_i). \quad (35)$$

Jetzt gehen wir zu kinetischen Energien über:

$$t_i = \varepsilon_i - m_i; \quad M = \sum m_i; \quad E - M = T \quad (36)$$

und erhalten

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho^*(E, m_1 \dots m_n, 0) = (4\pi)^n \int_0^{\infty} dt_1 \dots \int_0^{\infty} dt_n \Phi(t_1 \dots t_n) \delta(T - \sum t_i) \text{ mit} \\ \Phi(t_1 \dots t_n) = u_1(t_1 + m_1) \dots u_n(t_n + m_n) \cdot v_n(0, t_1 + m_1, \dots, t_n + m_n). \end{array} \right. \quad (37)$$

Zuletzt stellen wir die t_i als Differenzen von Größen T_i dar:

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = T_1 \\ t_2 = T_2 - T_1 \\ \vdots \\ t_n = T_n - T_{n-1} \end{array} \right\} \quad (38)$$

Damit wird aus (37)

$$\varrho^*(E, m_1 \dots m_n, 0) = (4\pi)^n \int_0^\infty dT_1 \int_{T_1}^\infty dT_2 \dots \int_{T_{n-2}}^\infty dT_{n-1} \int_{T_{n-1}}^\infty dT_n \times \\ \times \Phi(T_1, T_2 - T_1, \dots) \cdot \delta(T - T_n).$$

Durch Integration über T_n folgt

$$\varrho^*(E, m_1 \dots m_n, 0) = (4\pi)^n \int_0^T dT_1 \int_{T_1}^T dT_2 \dots \int_{T_{n-2}}^T dT_{n-1} \times \\ \times \Phi(T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1}) \quad (39)$$

wo Φ mit Hilfe von (37) und (34) berechnet werden kann.

Auf die Formel (39) wenden wir eine Monte-Carlo-Methode an: Wir wählen $n - 1$ im Intervall 0 bis T gleichmäßig (d. h. mit konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte) verteilte Zufallszahlen und benennen sie der Größe nach:

$$T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_{n-1}.$$

Einen solchen Satz von $n - 1$ Zufallszahlen nennen wir eine geordnete Stichprobe. Wir behaupten nun: Wenn N solche geordneten Stichproben

$$\{T_1^{(i)}, T_2^{(i)}, \dots, T_{n-1}^{(i)}\}; \quad i = 1 \dots N$$

genommen werden, so ist

$$\int_0^T dT_1 \int_{T_1}^T dT_2 \dots \int_{T_{n-2}}^T dT_{n-1} \Phi(T_1, T_2 - T_1, \dots) = \\ = \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi(T_1^{(i)}, T_2^{(i)} - T_1^{(i)}, \dots, T_n^{(i)} - T_{n-1}^{(i)}) \quad (40)$$

Um (40) zu beweisen bemerken wir, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die i -te geordnete Stichprobe in die Zellen (siehe Figur) $\Delta T_1, \Delta T_2, \dots, \Delta T_{n-1}$ fällt,



gegeben ist durch

$$(n-1)! \frac{\Delta T_1}{T} \cdot \frac{\Delta T_2}{T} \dots \frac{\Delta T_{n-1}}{T} = \frac{(n-1)!}{T^{n-1}} \cdot \Delta T_1 \Delta T_2 \dots \Delta T_n.$$

N mal diese Wahrscheinlichkeit gibt die Gesamtzahl der geordneten Stichproben, die in genau diese Zellen fallen und alle diese liefern (wenn alle $\Delta T_i \rightarrow 0$) denselben Wert von Φ . Da ferner $T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T$ ist, würden wir die Summe $\sum_{i=1}^N \Phi_i$ näherungsweise berechnen als

$$\sum_{i=1}^N \Phi(T_1^{(i)} \dots) \approx N \cdot \frac{(n-1)!}{T^{n-1}} \int_0^T dT_1 \int_{T_1}^T dT_2 \dots \int_{T_{n-2}}^T dT_{n-1} \cdot \Phi(T_1 \dots)$$

womit (40) bewiesen ist, da im Limes $N \rightarrow \infty$ das Gleichheitszeichen gilt.

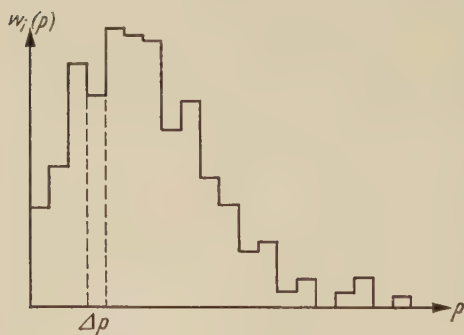
Damit ist auch prinzipiell klar, wie man auf einem Rechenautomaten ϱ^* berechnet: Man stellt einen Satz Zufallszahlen her und berechnet Φ . Das tut man sehr oft und addiert gemäß (40) alles auf. Zweckmäßigerweise läßt man N offen und berechnet (40) für mehrere Sätze S_K von je N_0 Stichproben, die jeweils ein etwas anderes ϱ_K^* ergeben. Der Mittelwert $\bar{\varrho}^*$ all dieser ϱ_K^* konvergiert gegen das „wahre“ ϱ^* und aus den Abweichungen $\sum_K (\varrho_K^* - \bar{\varrho}^*)^2$ läßt sich der wahrscheinliche Fehler

bestimmen. Diese Probe wird während der Rechnung stets nach jedem Satz von N_0 Stichproben (mit Ausnahme der ersten paar Sätze) durchgeführt und die Rechnung abgebrochen, sobald ein vorgeschriebener Minimalfehler unterschritten wurde [12, 22].

Die Spektren aller Teilchen werden hierbei automatisch mitberechnet, indem man jedem Teilchen eine Reihe von, sagen wir, 30 Speicherzellen zuteilt, die geeignet gewählten Impulsintervallen Δp entsprechen (nämlich so, daß $30 \cdot \Delta p$ der höchste einem einzelnen Teilchen erreichbare Impuls ist). Hat in der k -ten Stichprobe das Teilchen i (etwa Pion) den Impulswert $p_i^{(k)} = \sqrt{t_i^{(k)2} + 2t_i^{(k)}m_i}$ erhalten, so addiert die Maschine die Funktion $\Phi(T_1^{(k)} \dots)$ in diejenige der 30 Speicherzellen des i -ten Teilchens, in der $p_i^{(k)}$ liegt (also in die Zelle mit der Nummer $[p_i/\Delta p]$). Betrachten wir einmal eine feste Teilchensorte, so sehen wir, daß bei jeder Stichprobe die zugehörige Funktion Φ in genau eine der für das Teilchen reservierten 30 Zellen Δp addiert wird. Am Ende der Rechnung erhält man in diesen Zellen ein Histogramm dessen Summe über alle Zellen (bis auf triviale Faktoren) genau ϱ^* ist. In der Tat stellt jetzt, wie eine nähere Überlegung zeigt, dieses Histogramm das Spektrum des betreffenden Teilchen dar, d. h. eine Histogramm-Näherung für

$$w_i(p) = \text{const} \cdot p_i^2 \cdot \varrho^*(E - \varepsilon_i, m_1 \dots m_i \dots m_n, p_i). \quad (41)$$

Diese Näherung enthält natürlich in der einzelnen Zelle größere statistische Fehler als $\varrho^*(E, m_1 \dots m_n, 0)$ selbst (siehe Figur).



Diese Monte-Carlo-Methode liefert also in einem Rechengang den Faktor $\varrho^*(E, m_1 \dots m_n, 0)$ und die Spektren $w_i(p)$ aller Teilchen. Praktische Rechnungen zeigten, daß auf einer schnellen Maschine (Ferranti-Mercury bei CERN) Genauigkeiten von einigen Prozent in 1–15 Minuten (je nach Teilchenzahl) erreicht werden. Verlangt man, daß die Reaktionen mit größtem Gewicht (großes ϱ^*) genau zu berechnen sind (sagen wir auf 2%), so ergibt sich, daß die meisten anderen (deren ϱ^* viel kleiner ist) nur noch auf 10% oder noch viel weniger

genau bestimmt werden müssen. So konnte man selbst Fälle wie 25 GeV (Lab) pp-Stöße, zu denen etwa 600 Reaktionen beitragen, in etwa 50–100 Stunden Rechenzeit vollständig erledigen, während bei 6,2 GeV nur 8 Stunden benötigt wurden. Es würde aber aussichtslos sein, etwa > 100 GeV pp-Stöße mit diesen Methoden anzugehen.

Die Brauchbarkeit der Methode scheint wesentlich darauf zu beruhen, daß die Zufallszahlen im Mittel zur Gleichverteilung der kinetischen Energie führen,

d. h., fast alle Beiträge zum Integral werden dort berechnet, wo der Integrand sowieso ein steiles Maximum hat. Diese Methode entspricht also einer numerischen Integration, in der man die Intervalllänge dem Verlauf des Integranden anpaßt: Kleine Intervalle an steilen Maxima, große dort, wo der Integrand klein oder langsam veränderlich ist.

2. Auswertung und Reduktion der berechneten Spektren und Phasenraumintegrale auf physikalische Aussagen

Die nach der soeben beschriebenen Methode berechneten Spektren und Phasenraumintegrale haben noch keine direkte physikalische Bedeutung. Nehmen wir an, die Maschine liefere die auf eins normierten Spektren und die Werte der Phasenraumintegrale ϱ^* für jede Reaktion F :

$$\varrho_F^* \text{ und } w_i^{(F)}(p)$$

sind dann in Form von Lochstreifen gegeben, die für die Auswertung wieder in die Maschine eingelesen werden können. Sei L_F der Lochstreifen, der ϱ_F^* und die Spektren $w_i^{(F)}$ enthält.

Damit die Maschine $P(F)$ für alle F berechnen kann, muß zusammen mit L_F eine Reihe von Daten eingelesen werden, die die nach (20) erforderlichen Informationen enthalten, nämlich für die Reaktion F :

die Spins J_j aller Teilchen,

die Zahlen N_K gleicher Teilchen,

α, β, γ , also die Zahlen der Teilchen mit Isospins $1/2, 1, 3/2$,

T , den totalen Isospin,

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, die gewählten Wechselwirkungsvolumen und

n_1, n_2, n_3 , die zu ihnen gehörenden Teilchenzahlen.

Ferner müssen für jede Teilchensorte (einschließlich instabiler Teilchen) wieder je 30 Zellen für das Spektrum reserviert werden. Das Auswerteprogramm [16, 17] sorgt jetzt dafür, daß das Lochband L_F mit zugehörigen Interpretationsdaten eingelesen, $P(F)$ nach (20) berechnet und alle (auf eins normierten) Spektren $w_i^{(F)}$ mit $F(P)$ multipliziert werden, was $P(F, p_i)$ ergibt (siehe [21]). Das Band mit den Interpretationsdaten enthält noch die Angaben, an welcher Stelle im Speicher $P(F, p_i)$ abgelegt werden soll. Das geschieht additiv, nachdem noch mit $n_i^{(F)}$, der Zahl der Teilchen i in der Reaktion F , multipliziert wurde. Ferner wird $P(F)$ ausgedruckt und $\Sigma P(F)$ abgespeichert.

Sind so alle Reaktionen L_F mit zugehörigen Interpretationsdaten eingelesen, so befinden sich alle in (22) bis (24) definierten Größen praktisch fertig zum Ausdrucken im Speicher. Man muß nur die Spektren noch normieren und mittlere Energien berechnen. Schließlich kann man einige der Spektren, die instabilen Teilchen entsprechen, „zerfallen“ lassen, wobei (18) benutzt wird. Wenn das geschehen ist, kann man die Spektren noch durch ein geeignetes Interpolationsverfahren glätten, um die Reste der statistischen Schwankungen zu beseitigen. Da die Spektren (je nach Teilchenmasse) sehr verschiedene Form haben können, ist das nicht einfach. Man darf zur Interpolation nicht zu hohe Ordnungen (von Polynomen, Fourierreihen oder anderen geeigneten orthogonalen Systemen) zulassen, da sonst die statistischen Schwankungen reproduziert werden. Andererseits kann man Kurvenscharen mit stark wechselnden Formen nicht durch Interpolationen niederer Ordnung gut annähern. Daher ist es zweckmäßig, durch

geschickt gewählte Transformationen alle Spektren auf eine Art „Einheitsform“ zu bringen, dann zu glätten und nachher wieder zurückzutransformieren. Das alles muß natürlich automatisch (ohne Eingriff eines menschlichen Beobachters) geschehen. Das heißt: Das Unterprogramm für Interpolation muß die Spektren auf ihre Form prüfen und individuell jedem Spektrum „seine“ Transformation zuordnen, die es der gewünschten „Normalform“ möglichst nahe bringt, muß diese Normalform glätten und dann wieder zurücktransformieren.

Nachdem all diese Operationen ausgeführt sind, läßt man ausdrucken und erhält nur noch eine gut übersehbare Menge physikalischer Daten.

Das soeben in großen Zügen beschriebene Auswertprogramm muß auf das Monte-Carlo-Programm abgestimmt sein. Eine genaue Beschreibung findet sich in [16, 17].

D. Anwendungen

Vergleich mit verschiedenen Experimenten

Die beschriebenen Methoden der statistischen Theorie sind bisher zur Berechnung folgender Fälle benutzt worden (Energie immer im Laborsystem)

pp-Stöße bei	2.75 GeV	kinetischer Primärenergie	[3, 7]
pp-Stöße bei	6.25 GeV	„ „	[8, 29]
pp-Stöße bei	25 GeV	„ „	[18]
NN-Vernichtung	in Ruhe [21, 22]		
Denteronproduktion	in pp-Stößen [31]		

Beim Vergleich der Rechnungen mit Experimenten stellt man folgendes fest:
1. Bei 2.75 GeV erhält man für das Verhältnis der Häufigkeiten der Erzeugung von 0, 1, 2, 3, 4 Pionen gute Übereinstimmung mit dem Experiment, wenn das Nukleon-Isobar ($m^* = 1.31$, $T = J = 3/2$) als instabiles Teilchen behandelt wird; dagegen ist die Übereinstimmung schlecht, wenn man das Isobar fortläßt [Tabelle 1]:

Tabelle 1 (entnommen aus [7]):

Endzustand	Wahrscheinlichkeit in Prozenten		
	ohne Isobar	mit Isobar	Experimentell
2N	7.13	2.4	unbekannt (klein)
2N + π	63.9	30.3	36
2N + 2 π	26.9	48.4	48
2N + 3 π	1.8	18.5	16
2N + 4 π	0.02	0.4	unbekannt (klein)

Die Tabelle zeigt, wie groß der Einfluß des Nukleonisobars ist. Das ist nicht selbstverständlich, denn die Lebensdauer ist von derselben Größenordnung wie die Reaktionszeit: $\sim 10^{-22}$ sec. Man wird also dieses Isobar bei allen Rechnungen berücksichtigen, sein Wechselwirkungsvolumen sollte dem für Nukleonen und Pionen etwa gleich sein.

2a. Bei 6.25 GeV findet man für die Produktion von Antiprotonen die richtige Größenordnung $\langle n_{\bar{p}} \rangle : \langle n_{\pi^-} \rangle \approx 10^{-5}$, wenn man für Antinukleonen dasselbe Wechselwirkungsvolumen Ω nimmt wie für Nukleonen und Pionen. Man könnte meinen, daß an der Antinukleonenproduktion vorzugsweise der „core“ beteiligt und daher

ein entsprechend kleines Ω zu nehmen sei. Dies führt zum Widerspruch mit dem Experiment. Das läßt vermuten, daß die Nukleon-Antinukleon-Wechselwirkung von der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung nicht sehr verschieden ist und der beobachtete größere totale Wirkungsquerschnitt für $N\bar{N}$ -Stöße im wesentlichen vom großen Phasenraum für Vernichtung herrührt.

2b. Bei 6.2 GeV findet man die richtigen Verhältnisse für die Häufigkeit von Ereignissen mit 2, 4, 6 usw. erzeugten geladenen Teilchen und die richtige totale Zahl pro Ereignis [8, 20]. Die Spektren werden aber nicht gut wiedergegeben. Durch Einführen eines $\pi\pi$ -Resonanzzustandes („Pion-Isobar“ in Analogie zum Nukleonisobar), der aus ganz anderen Gründen (Nukleonstruktur, Paarvernichtung) schon gefordert wurde und durch Berücksichtigung „nichtzentraler“ Stöße konnte man die Übereinstimmung verbessern [20, 23, 24]. Wir kommen darauf zurück.

2c. Über die Produktion von K-Mesonen und -Hyperonen ist nur für einige Winkel im Laborsystem etwas bekannt. Die Rechnungen in [8] gelten für das Schwerpunktsystem, eine Transformation auf das Laborsystem wurde nicht durchgeführt. Es scheint aber, daß die Produktion von „strange particles“ richtig wiedergegeben wird (Größenordnung), wenn man $\Omega_2 = (1/2 \text{ bis } 1/5) \cdot \Omega_\pi$ setzt und für die K-Mesonen reserviert, während für die Hyperonen Ω_π zu nehmen ist. Mit diesen Werten erhält man anscheinend auch Übereinstimmung mit Experimenten bei 25 GeV.

3. Nachdem die Wechselwirkungsvolumen an Experimenten bei niedriger Energie ungefähr festgelegt sind, kann man bei höheren Energien Voraussagen machen, die von Interesse für die Planung von Experimenten sind. Aus diesem Grunde wurde bei 25 GeV eine Rechnung für das CERN Proton-Synchrotron durchgeführt. Experimentelle Ergebnisse liegen noch kaum vor, da am 25 GeV-Proton-Synchrotron in CERN bisher keine Wasserstofftargets benutzt wurden. Trotzdem hat man die Rechnungen (nach Transformation ins Laborsystem) mit Messungen verglichen und qualitative Übereinstimmung gefunden, die teils gut, teils schlecht ist. Es scheint aber, daß die Abweichungen im wesentlichen damit erklärt werden können, daß Eisen oder Aluminium statt Wasserstoff als Targetmaterial benutzt wurde [sekundäre Reaktionen (Kernkaskaden), Nukleonenbewegung im Kern, schlecht definiertes Schwerpunktsystem, usw.]. Die einzige (auf dem Umweg über Kernemulsionen) an Nukleonen gemessene Zahl ist: Pro Ereignis verlassen im Mittel 4.02 (alle Stöße) bzw. 4.68 (pp-Stoß) geladene Teilchen die Reaktion (private Mitteilung von H. WINZELER, Bern), während man für pp-Stöße 4.6–4.7 aus der Theorie [18] erhält. Vernachlässigt man den Einfluß des totalen Isobarenspins, der im pn-Stoß nicht definiert ist, so lautet die Aussage der Theorie, daß die Zahl $C - 2$ der neu erzeugten Ladungen etwa 2.6 bis 2.7 ist [siehe Bild 2]. Im pp-Stoß sollte die Gesamtzahl geladener Teilchen nach dem Stoß also etwa 4.6–4.7, für p-Kern-Stoß [= (pn + pp)-Stöße] 4.1–4.2 betragen. Die Unsicherheit des theoretischen Wertes kommt von der ungenauen Festlegung von

$$\Omega_K = (1/2 \text{ bis } 1/5) \cdot \Omega_\pi.$$

Interessant wäre die Antinukleon- und Hyperonproduktion. Man findet in der Tat eine wesentlich kleinere Antinukleonenzahl, als die Theorie voraussagt. Die Abweichungen lassen sich qualitativ durch den Einfluß der peripheren Stöße (siehe unten) und durch die Tatsache erklären, daß ein Teil der Antinukleonen in demselben Kern vernichtet wird, in dem die Erzeugung stattfand. Das Verhältnis $\langle n_{K^+} \rangle : \langle n_{K^-} \rangle$ sollte weniger als jenes von $\langle n_{\bar{p}} \rangle : \langle n_{\pi^-} \rangle$ durch die Anwesenheit von

Kernmaterie beeinflußt werden, d. h. es sollte auch bei Metalltargets einen Wert haben, der dem für pp-Stöße berechneten nahe kommt. Man findet experimentell bei einem K-Impuls von 2 GeV/c und einem Winkel von 18° (Laborsystem) $\langle n_{K^+} \rangle$: $\langle n_{K^-} \rangle \approx 2$ bis 3 (private Mitteilung von N. H. LIPMAN, CERN), während die Rechnung nach Transformation ins Laborsystem [25] folgende Zahl ergibt: Bei 10° hat man 3.5, bis 20° findet man 3.85. Da beim Experiment auch p-n-Stöße beitragen, kann man verstehen, daß der gemessene Wert unter dem (für p-p) gerechneten liegt.

Erst mit Wasserstofftargets wird man die 25 GeV-Rechnungen wirklich prüfen können.

Daß und welche Abweichungen dabei auftreten werden (die sich bei 6.2 GeV schon andeuteten) wird weiter unten diskutiert werden.

4. Die $p\bar{p}$ -Vernichtung in Ruhe hat seit je Kopfzerbrechen gemacht, denn die beobachteten Pionzahlen waren um 5 verteilt, während man mit der statistischen

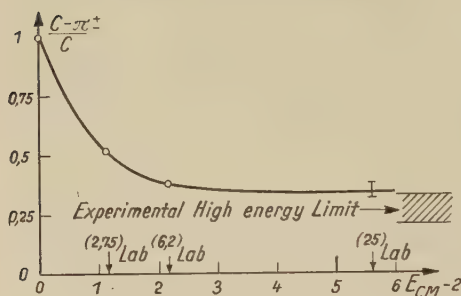


Bild 1. Bei 2.75 GeV und 6.2 GeV liegen die gerechneten Punkte praktisch auf den gemessenen. Die Kurve ist von Hand interpoliert, so daß sie durch alle gerechneten Punkte und die bei 25 GeV berechneten Grenzen geht (der Wert bei 25 GeV hängt noch von der Wahl Ω_K für K-Mesonen etwas ab). Die Figur ist aus [18] entnommen

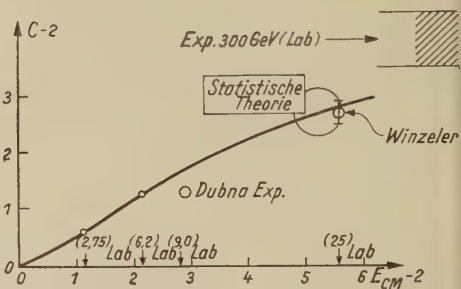


Bild 2. Bei 2.75 und 6.2 GeV hat man Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Die Kurve ist durch diese Werte und zwischen den Grenzen (je nach Ω_K) für 25 GeV gezogen. Der Wert für etwa 300 GeV (Emulsion) ist im Einklang mit den gerechneten Werten. Der Wert bei 25 GeV (WINZELER, private Mitteilung) kann sich nur noch geringfügig ändern, er ist gemessen worden, nachdem die Kurve publiziert wurde und hier nachträglich in die aus [18] entnommene Abbildung eingezeichnet worden

Theorie etwa $\langle n_\pi \rangle \approx 3$ berechnete. Verschiedene Autoren haben es mit Gewalt versucht: Man kann auf $\langle n_\pi \rangle \approx 5$ kommen, wenn man statt $\Omega_\pi = (4\pi/3) (1/\mu)^3$ ein mehr als 10mal größeres Ω_π nimmt. Da aber bei der p-p-Wechselwirkung die Pionerzeugung gut wiedergegeben wird und dort ein zehnmal größeres Ω_π nicht tragbar ist, scheint diese Lösung widerspruchsvoll. F. CERULUS [21, 22] hat daher den von anderen Autoren (Literatur siehe [21]) in anderem Zusammenhang vorgeschlagenen $\pi\pi$ -Resonanzzustand $\pi^*(m \approx 4\mu, J = T = 1)$ als instabiles Teilchen in die statistische Theorie der Paarvernichtung aufgenommen. Dann war es möglich, die richtige Pionzahl mit dem „natürlichen“ Wechselwirkungsvolumen $(4\pi/3) (1/\mu)^3$ zu erreichen. Auch die Spektren, der Anteil von K-Paaren [22] und die Häufigkeiten von 2:4:6-Spuren Ereignissen werden gut wiedergegeben. Das 2-Spuren-Spektrum hat am oberen Ende (≈ 800 MeV kin. Energie des Pions) ein scharfes Maximum, herrührend von dem direkt erzeugten π in $p + \bar{p} \rightarrow \pi^* + \pi$ und ein weiteres Maximum von $p + \bar{p} \rightarrow \pi + \pi$. Während letzteres immer da ist, gibt es das erstere nur, wenn π^* existiert. Seine Lage und Breite ist durch die

„Masse“ und Resonanzbreite (Lebensdauer) des „Teilchens“ π^* gegeben. Experimentell liegen Anzeichen für ein solches Maximum vor, jedoch kann es sich um eine statistische Schwankung handeln; zur Zeit ist noch keine Entscheidung möglich. Das Pion-Isobar hat auch Winkelkorrelationen zur Folge.

Da es hier nicht möglich ist, auf Einzelheiten einzugehen und viele berechenbare Größen experimentell kaum untersucht sind, sollen nur noch zwei Beispiele angeführt werden, die gewisse Ergebnisse der Rechnungen zusammenfassen [18] (p-p-Stöße):

In Bild 1 ist die Größe $[C - \pi^\pm]/C$ als Funktion der Energie aufgetragen. C ist die Gesamtzahl geladener Teilchen, die das Reaktionszentrum verläßt (einschließlich der eingebrachten Ladung 2) und π^\pm die Zahl der geladenen Pionen. Demnach ist $C - \pi^\pm/C$ das Verhältnis der Zahl solcher geladenen Teilchen, die keine Pionen sind, zur Zahl aller geladenen Teilchen.

In der nächsten Figur (Bild 2) findet sich $C - 2$ als Funktion der Energie. Neuere Vergleiche mit dem Experiment finden sich in [32] und [31]. In [31] handelt es sich um die Produktion von Deuteronen, die befriedigend beschrieben werden können.

E. Diskussion

Grenzen der Theorie und laufende Untersuchungen

Der soeben gegebene Überblick zeigt, daß die statistische Theorie in ihrer jetzigen Form manche experimentellen Fakten wiedergeben kann und das um so besser, je integraler die berechneten Größen definiert sind. Absolute Teilchenzahlen (pro Ereignis) kommen ziemlich genau heraus, Spektren weniger gut. Offenbar sind auch die niedrigen (< 2 GeV) und hohen (> 25 GeV) Energien nicht günstig: Bei den niedrigen spielen Details der Endzustände eine Rolle, die in der statistischen Theorie nicht behandelt werden (siehe aber eine Arbeit von B. R. DESAY [26], in der Auswahlregeln für $N\bar{N}$ -Vernichtung mit der statistischen Theorie vereinigt werden) und bei den höheren scheinen geometrische Effekte (Stoßparameter, Inelastizität) wichtig zu werden. Diese letzten Effekte, mit denen wir uns jetzt etwas beschäftigen wollen, beruhen darauf, daß bei wachsender Energie die Nukleonen im Schwerpunktsystem immer platter werden (Lorentz-Kontraktion). Ihre relative Geschwindigkeit ist praktisch immer die Lichtgeschwindigkeit. Daher nimmt die Zeit, während der sie miteinander im Kontakt sind, mit steigender Energie (d. h. mit zunehmender Abplattung) immer mehr ab. Die Wechselwirkung pflanzt sich aber senkrecht zur Bewegungsrichtung höchstens mit Lichtgeschwindigkeit durch das Nukleon fort. Wenn der Stoß nicht zentral war, so kann es sein, daß die Kontaktzeit zu kurz war, als daß die Wechselwirkung sich über das ganze Volumen hätte ausdehnen können. Dann trennen sich beide Nukleonen vor Erreichung eines Gleichgewichts und es entstehen zwei Zentren, die jedes für sich ein Gleichgewicht anstreben und dann einzeln durch die statistische Theorie beschrieben werden sollten [27]. Das würde zwei Effekte erklären:

- Erstens wird wegen der zu kurzen Kontaktzeit die Geschwindigkeit nur teilweise abgebremst und in Anregungsenergie verwandelt. Jedes Zentrum behält noch einen unter Umständen beträchtlichen Anteil kinetischer Energie und nur den Rest kann als Anregungsenergie zur Produktion von Teilchen benutzt werden. Die Inelastizität wird also bei fester Energie mit wachsendem Stoß-

parameter und bei festem Stoßparameter mit wachsender Energie kleiner werden. Damit wird die Baryon-Paarerzeugung gedrückt.

- Zweitens bewegen sich die beiden Zentren. Wenn jedes in seinem Ruhssystem isotrop emittiert, so ergibt sich im gemeinsamen Schwerpunktsystem eine Vorwärts-Rückwärts-Anisotropie.

Stöße bei denen — bei gegebener Energie — der Stoßparameter so klein bleibt, daß die Wechselwirkung sich während der Kontaktzeit über beide Nukleonen

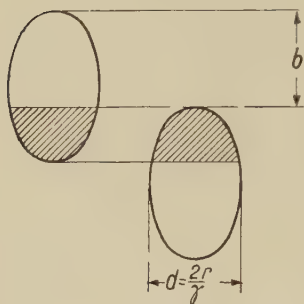


Bild 3. Zur Definition „zentraler“ Stöße

ausdehnen kann, dürfen mit der vorliegenden Theorie als „Zentrale Stöße“ behandelt werden. Man sieht, daß die Definition von „Zentral“ energieabhängig ist. Nach obigen Überlegungen liest man aus Bild 3 ab:

Der Nukleon-Durchmesser ist $d \approx 2/\gamma\mu$ mit $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = E/2$, wenn E die totale Energie im Schwerpunktsystem ist ($M = 1$!). Die Kontaktzeit ist also $t \approx 2/\gamma\mu$, und wenn $b > t$ ist, kann die Wechselwirkung nicht beide Nukleonen ganz erfassen. Man hat also die Bedingung für „zentralen Stoß“:

$$b \lesssim b_0 = \frac{2}{\gamma\mu} = \frac{4}{\mu E}. \quad (42)$$

Da der Nukleonendurchmesser $2/\mu$ das natürliche Maß ist, finden wir für

$$\frac{\sigma_{\text{zentral}}}{\sigma_{\text{geometr.}}} = \frac{b^2}{(2/\mu)^2} \lesssim \left(\frac{2}{E}\right)^2, \quad (43)$$

das ergibt folgende Werte:

$E_{\text{Lab, kin}}$ [GeV]	2.75	6.2	25
E	3.14	4.15	7.58
σ_z/σ_g	0.4	0.23	0.07

Diese Überlegungen zeigen, daß man versuchen sollte, bei gegebener Energie nur die „zentralen“ Stöße mit der vorliegenden Theorie zu beschreiben. Dann muß man für die größeren Stoßparameter ein Zwei-Zentren-Modell [27] benutzen. Die Anregungsenergie ΔE würde man etwa proportional dem Volumen setzen, über das die Wechselwirkung sich während der Kontaktzeit ausbreiten kann. Dann wäre

$$\Delta E \approx \frac{\Delta V}{V} \cdot (E - 2) = K(b, E) \cdot (E - 2). \quad (44)$$

(Nukleon-Nukleon-Stoß)

Der Rest, $E - 2 - \Delta E$, ist die kinetische Energie der beiden Zentren, womit (unter der Annahme, daß keine nennenswerte Richtungsänderung stattfindet) die Transformation vom Ruhssystem der Zentren auf das Schwerpunktsystem vollständig und die Winkelverteilung fast vollständig festgelegt sind. $\Delta E/(E - 2)$ ist im wesentlichen die Inelastizität.

Ein einfaches Modell kann qualitativ zeigen, was dabei zu erwarten ist. Nehmen wir an, die Nukleonen seien homogene Kugeln¹⁾ mit dem Radius $r = 1/\mu$. Wir bezeichnen mit ΔV das gesamte (eng- und weit-) schraffierte Gebiet in Bild 4 und berechnen ΔV unter der vereinfachenden Annahme, daß dieses Gebiet eine Kugelkalotte der Höhe $a = 2r - b + b_0$ sei. Aus elementaren Formeln folgt dann

$$K(b, E) = \frac{\Delta V}{V} = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 2r \\ \left[1 - \frac{b - b_0}{2r}\right]^2 \cdot \left[1 + \frac{b - b_0}{r}\right] & \text{für } b_0 \leq b \leq 2r \\ 1 & \text{für } 0 \leq b \leq b_0 \end{cases} \quad (45)$$

$$b_0 = \frac{4r}{E}; \quad r = \frac{1}{\mu} = \text{„Nukleonenradius“}.$$

$\Delta E = (E - 2) \cdot K(b, E)$ ist die zur Teilchenerzeugung angebotene Energie. Wir nennen $K(b, E)$ die „angebotene Inelastizität“. Für höhere Energien wird sie der experimentellen Inelastizität nahe kommen.

Nachdem $K(b, E)$ durch ein Modell festgelegt ist, kann man bei gegebener Energie E die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$W(K, E) dK = 2\pi b(K, E) \frac{db(K, E)}{dK} dK \quad (46)$$

durch Umkehrung von (45) berechnen. Da mit $K(b, E)$ die kinetische und Anregungsenergie der Zentren festgelegt ist, kann man auf jedes Zentrum (etwa unter Annahme der Gleichverteilung der Anregungsenergie: $\Delta E/2$ je Zentrum) die statistische Theorie anwenden und auf das gemeinsame Schwerpunktsystem zurücktransformieren. Das ergibt für jedes b eine Impuls- und Winkelverteilung, Multiplizität usw. Zuletzt hat man über alle b (bzw. nach (46) über alle K) zu integrieren, kann aber auch mit (46) Wahrscheinlichkeitsverteilungen angeben. Mit der in dieser Arbeit beschriebenen Technik scheint das für höhere Energien aussichtslos, da die erforderlichen Rechnungen zu lang werden. Bei 6.2 GeV ist eine derartige Rechnung mit Erfolg durchgeführt worden [20]; wir kommen darauf zurück.

Wir wollen aus (45) nur eine Folgerung ziehen, nämlich die (über alle Stoßparameter b) gemittelte „angebotene“ Inelastizität $\bar{K}(E)$ berechnen. Offenbar ist

$$\bar{K}(E) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2r} 2\pi b db \cdot K(b, E). \quad (47)$$

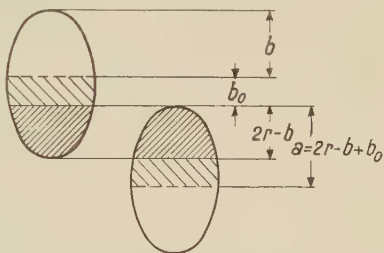


Bild 4. Zur Inelastizität: Definition von $\Delta V/V$. Das engschraffierte Gebiet ist das der Überlappung während der Kollision; das weitschraffierte ist das Gebiet, in das die Wechselwirkung während der Kontaktzeit $2r/\gamma$ eindringt

¹⁾ Natürlich sollte man, wenn dieses Modell zu quantitativen Rechnungen benutzt wird, die Nukleonenstruktur berücksichtigen.

Man erhält mit (45)

$$\overline{K}(E) = \frac{1}{4\pi r^2} \left[\pi b_0^2 + \int_{b_0}^{2r} 2\pi b \, db \cdot K(b, E) \right]; b_0 = \frac{4r}{E}. \quad (48)$$

Man sieht, daß $\overline{K}(E)$ eine Funktion ist, die von $E = E_{\min} = 2$ an stetig abfällt. Sie erreicht einen konstanten Wert, wenn $E \rightarrow \infty$, also $b_0 \rightarrow 0$ geht, da dann nur das Integral übrig bleibt. Man erhält aus (45)

$$\overline{K}(E) = \frac{3}{20} + \frac{1}{E} \left[1 + \frac{4}{E} \left[\left(1 - \frac{1}{E} \right)^2 + \frac{4}{5E^3} \right] \right], E \gg 2. \quad (49)$$

Für kleine Energien sollte man $\overline{K}(E)$ nicht mit der experimentellen Inelastizität vergleichen, bei sehr großen Energien erhält man $\overline{K}(E) = 0.15 + 1/E$, was der in kosmischer Strahlung gefundenen Verteilung nicht widerspricht (v. LINDERN, private Mitteilung).

Wir wollen die Sache hier nicht weiter verfolgen. Es sollte nur angedeutet werden, daß an dem naiven Bild doch etwas Richtiges sein möchte.

Die soeben gegebenen Überlegungen zur Inelastizität als Funktion von Energie und Stoßparameter klären auch einen weiteren Punkt auf, nämlich die Diskrepanz zwischen N-N-Stößen und N- \bar{N} -Vernichtung in Ruhe.

Wir hatten erwähnt, daß mit Benutzung eines π - π -Resonanzzustandes die N- \bar{N} -Vernichtung in Ruhe in Übereinstimmung mit dem Experiment beschrieben wird [21, 22].

Konsequenterweise sollte dieses π^* -„Teilchen“ auch bei N-N-Wechselwirkung eingeführt werden. Dann werden, wie eine Rechnung bei 6.2 GeV zeigte, die Multiplizitäten höher als die experimentellen. Eine Berücksichtigung der nicht-zentralen Stöße (nach der Tabelle hinter (43) also $\approx 76\%$) mit ihren kleineren Inelastizitäten würde das wieder ausgleichen und zudem eine Winkelverteilung liefern. Führt man das (45) zugrunde liegende Modell quantitativ durch [20], so ergibt sich, daß für die nichtzentralen Stöße die Anregungsenergie gerade ausreicht, um die sich bewegenden Zentren in den ersten N- π -Resonanzzustand zu versetzen, also entweder $N^* + N^*$ oder $N + N^*$ oder $N + N$ zu erzeugen. Die Autoren vernachlässigen alle anderen Anregungszustände in diesem Energiegebiet (der Erfolg des LINDENBAUM-STERNHEIMER-Modells [6] bei $\lesssim 1$ GeV Primärenergie rechtfertigt das) und führen ferner das Verhältnis $\sigma_{\text{zentral}}/\sigma_{\text{geom}}$ als Parameter ein (der die Größenordnung 0,23 haben sollte). Multiplizität, Häufigkeit der Ereignisse mit 2, 4, 6 Spuren, mittlere Energien und Winkelverteilung werden berechnet. Die experimentellen Ergebnisse [28, 29] stimmen untereinander nicht völlig überein. Daher ist in Einzelheiten noch kein Vergleich möglich, doch kann man die Zahl der geladenen erzeugten Teilchen und die Inelastizität mit $\sigma_{\text{zentr}}/\sigma_{\text{geom}} \approx 0.5$ richtig wiedergeben. Damit ist der einzige freie Parameter bestimmt. Das Verhältnis der Ereignisse mit 2, 4, 6 Spuren kommt dann richtig heraus, ebenso die mittleren kinetischen Energien. Dabei scheint die Anwesenheit eines Pion-Isobars $\pi^*(J = T = 1; m \approx 4\mu)$ wesentlich zu sein.

Diese explizite Rechnung, die leider mit den z. Zt. vorhandenen Methoden kaum für höhere Energie durchführbar ist, zeigt, daß hier wenigstens eine Möglichkeit liegt, weiterzugehen. Es ist eine Frage der technischen Durchführung. Die hier beschriebene Methode bleibt ganz im Rahmen der statistischen Theorie. Eine

wesentlich detailliertere Behandlung, aber auch noch im Rahmen der statistischen Theorie findet sich in [23, 24].

Schließlich kann man versuchen, die peripheren Stöße ganz aus der statistischen Theorie zu lösen und mit den üblichen Methoden der Pionphysik zu behandeln [30]. Dann ist die Zusammenfügung der beiden Methoden eine noch ungelöste Aufgabe.

Nach dem Gesagten scheint es merkwürdig, daß bei 25 GeV die durchgeführten Rechnungen [18] nicht völlig falsche Ergebnisse liefern. Entweder ist unsere Schätzung von $\sigma_{\text{zentral}}/\sigma_{\text{geom.}}$ zu pessimistisch — worauf das Ergebnis der Untersuchung bei 6.2 GeV [20] hinweist¹⁾ — oder die Behandlung aller Stöße als zentral (wie in [18] geschehen) überschätzt die Multiplizitäten in solcher Weise, daß damit die Vernachlässigung des Pion-Isobars π^* und höherer Anregungszustände der Nukleonen kompensiert wird. Vermutlich wirken sogar beide Ursachen gemeinsam. Hier bleiben, teilweise wegen der schwierigen experimentellen Situation, viele Fragen offen.

Der vorliegende Bericht beschreibt im Wesentlichen die bei CERN in den letzten beiden Jahren gewonnenen Ergebnisse. Wir wollen — ohne ins einzelne zu gehen, was den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde — wenigstens erwähnen, daß seit der Entwicklung von Beschleunigern, die in die Gegend von 10 GeV und mehr vordringen, an allen Orten, wo solche Maschinen stehen, an ähnlichen Fragen gearbeitet wird, vor allem in Dubna (UdSSR).

Meinen Kollegen bei CERN, besonders den Herren F. CERULUS und J. VON BEHR bin ich für die enge Zusammenarbeit dankbar.

Literatur

Das hier gegebene Verzeichnis ist alles andere als vollständig. Es wurde nur die Literatur angeführt, die in engerem Zusammenhang mit dem Inhalt dieses Berichtes steht.

- [1] E. FERMI, Progr. Theor. Phys. **5**, 570 (1950).
- [2] Z. Koba und S. Takagi, Fortschr. Phys. **7**, 1 (1959).
- [3] S. Z. BELENKIJ et al. Fortschr. Phys. **6**, 524 (1958).
- [4] S. Z. BELENKIJ, Nuclear Phys. **2**, 259 (1956/57).
- [5] J. KOWACS, Phys. Rev. **101**, 397 (1956).
- [6] S. J. LINDENBAUM und R. M. STERNHEIMER, Phys. Rev. **105**, 1874 (1957).
- [7] F. CERULUS und R. HAGEDORN, CERN 59—3 (Gelbe Serie der CERN-Publikationen).
- [8] R. HAGEDORN, Nuovo Cimento **15**, 246 (1960).
- [9] Y. YEIVIN und A. DE-SHALIT, Nuovo Cimento **1**, 1147 (1955).
- [10] V. S. BARASHENKOV und B. M. BARBASHEV, Suppl. Nuovo Cimento **7**, 19 (1957).
- [11] M. M. BLOCK, Phys. Rev. **101**, 796 (1956).
- [12] F. CERULUS und R. HAGEDORN, Suppl. Nuovo Cimento **9**, 646 und 659 (1958).
- [13] G. E. A. FIALHO, Phys. Rev. **105**, 328 (1957).
- [14] R. HAGEDORN, „A programme for calculating multiple phase space integrals ...“, CERN 1959 (internal report 6381; auf Anforderung erhältlich).
- [15] V. S. BARASHENKOV, B. M. BARBASHEV, E. G. BUBELEV und V. M. MAKSIMENKO, Nuclear Phys. **5**, 17 (1957).
- [16] R. HAGEDORN, CERN 59—25 (Gelbe Serie).
- [17] R. HAGEDORN, „Calculating high energy particle production ... on an electronic computer“, CERN 1959 (internal report 7580/Th. 62; auf Anfrage erhältlich).

¹⁾ Auch in [23] wird eine optimistischere Annahme gemacht, bei der die Nukleonstruktur eine Rolle spielt: Alle den „core“ treffenden Kollisionen gelten als zentral.

- [18] R. HAGEDORN, *Nuovo Cimento* **15**, 434 (1960).
- [19] F. CERULUS, *Suppl. Nuovo Cimento* **15**, 402 (1960).
- [20] J. v. BEHR und F. CERULUS, Preprint 1960 CERN (Nuovo Cimento im Druck).
- [21] F. CERULUS, *Nuovo Cimento* **14**, 827 (1959).
- [22] F. CERULUS, CERN 60—10 (Gelbe Serie).
- [23] V. S. BARASHENKOV, V. M. MALTSEV, E. K. MIHUL, *Nuclear Phys.* **13**, 583 (1959).
- [24] V. S. BARASHENKOV, *Nuclear Phys.* **15**, 486 (1960).
- [25] J. v. BEHR und R. HAGEDORN, CERN 60—20 (Gelbe Serie).
- [26] B. DESAY, Preprint, Berkeley, 1960.
- [27] G. COCCONI, *Phys. Rev.* **111**, 1699 (1958).
- [28] R. M. KALBACH, J. J. LORD und C. H. TSAO, *Phys. Rev.* **113**, 330 (1959).
- [29] H. WINZELER, B. KLAIBER, W. KOCH, M. NICOLIĆ und M. SCHNEEBERGER (Bern, Preprint, 29. 2. 1960).
- [30] F. SALZMANN und G. SALZMANN (Preprint, Univ. of Colorado, Boulder, 14. 4. 1960).
- [31] R. HAGEDORN, *Phys. Rev. Letters* **5**, 276 (1960).
- [32] Q. COCCONI, Bericht bei der Rochesterkonferenz 1960, im Druck.

Inelastic Interactions between High Energy Particles¹⁾

V. S. BARASHENKOV

*Joint Institute for Nuclear Research
Laboratory of Theoretical Physics, Dubna (USSR)*

Up to now for the description of inelastic collisions between high energy particles the Fermi theory was used. This theory is based upon a statistical equilibrium between the particles generated in the collision. A great number of papers are devoted to the development of this theory (the bibliography is given, e. g., in [1]). However, the accuracy of the results obtained was not high as the numerical calculations are very complicated. Only recently mathematical difficulties have been overcome, and new effective methods of calculations have been developed. The application of electronic computers allows to make the calculations quickly and effectively up to the energies of order of some dozen Bev. On the other hand, a great deal of experimental data obtained by means of the USA and USSR accelerators made it possible in some cases to compare the experiment with the theory. It has been thereby established that in the framework of the Fermi statistical theory it is impossible to account for many experimental facts already known. For their understanding it was found necessary to take into account the intrinsic structure of elementary particles. Let us consider these problems in more detail.

1. Comparison of Experimental Data with Calculations by Fermi Statistical Theory

It has been shown in the papers of many authors that the statistical theory of multiple production accounts for the average number of generated charged and neutral particles fairly well. The theoretical distributions by the number of prongs of the stars which are due to the collisions of high-velocity pions and nucleons with nucleons and in the antinucleon annihilation are found to be very close to the experimental ones. In Fig. 1, as an example such a distribution is given for the interaction of 6.8 Bev pions with protons and neutrons. Close are also the experimental and theoretical distributions of generated particles by the momenta. In Figs. 2 and 3 are compared the experimental and theoretical distributions for the (π -N) interactions at $E = 6.8$ Bev. (Experimental data are taken from [4]).

¹⁾ A review at the All-Union Inter-University Conference on the Field Theory and the Theory of Elementary particles; Uzhgorod, 1960.

However, in all cases the experimental spectrum of nucleons turns out to be harder than the theoretical one. For instance, for (PP) collisions at 9 Bev the experimental value of the mean momentum of protons in the c. m. s. is found to be (1.24 ± 0.25) Bev whereas the theoretical one is 0.8 Bev. As for the mean experimental value of the energy necessary for the production of new particles per collision, it turns out to be smaller than the calculated one.

The statistical theory of Fermi contradicts the experiment sharply when the angular distributions of generated particles are compared. In accordance with the main idea about the statistical equilibrium, which is the basis of this theory, the

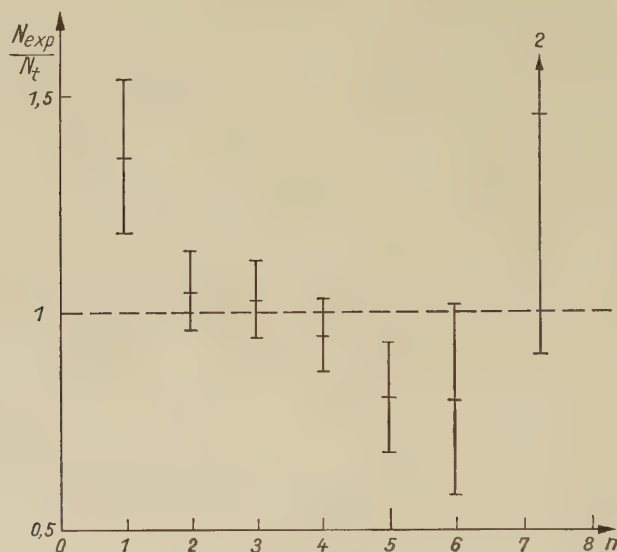


Fig. 1. The ratio of the number of n -prong stars experimentally observed to that calculated by the statistical theory.

An odd number of prongs — $(\pi^- n)$ collision

An even number of prongs — $(\pi^- p)$ collision

Energy $E = 6.8$ Bev.

The errors in the experimental data are indicated

angular distribution of the generated particles must be symmetrical in the c. m. s. with respect to the angle $\theta = \pi/2$. The account of the law of momentum conservation leads to the *anisotropic* angular distribution of the generated particles. For example, in case of two-particle reaction this distribution is as follows [22]¹:

$$\frac{dW(\theta)}{d\Omega} = \frac{R}{\sqrt{Y}} \left[1 - \frac{(M_1^2 - M_2^2)^2}{E_0^4} \right] \sqrt{1 - \frac{4 \cdot L^2 \cdot \sin^2 \theta}{E_0^2 R^2 Y}} \times \\ \times \theta \left(\frac{E_0^2 R^2}{4} Y - L^2 \right) \delta(\cos \theta),$$

¹) This expression passes into a well-known BLOCK's formula [25], if it is integrated over $d\Omega$ and $d^3L = 2\pi L dL$.

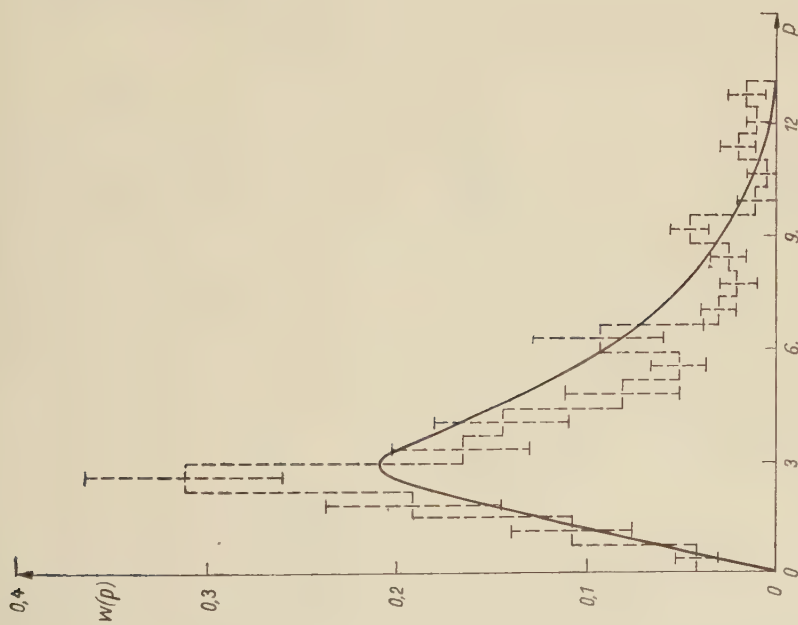


Fig. 2. The momentum spectrum of π -mesons in the c. m. s. of the colliding π^- -meson and a nucleon. The dashed curve is the experimental histogram. The momenta are given in the units of μc , where μ is the mass of a π -meson

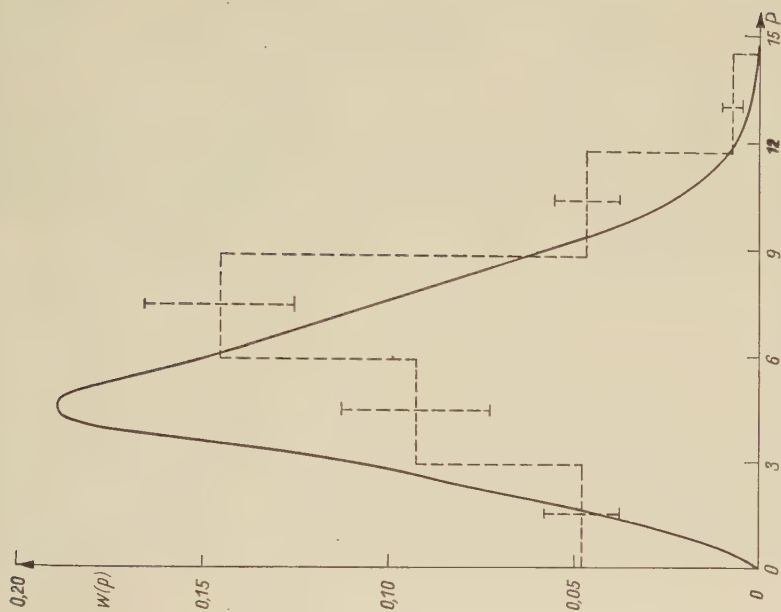


Fig. 3. The momentum spectrum of nucleons in the c. m. s. of the colliding π^- -meson and a nucleon. The dashed curve is an experimental histogram. The momenta are given in the μc units, where μ is the mass of a π -meson

where

$$Y = 1 - \frac{2(M_1^2 + M_2^2)}{E_0^2} + \frac{(M_1^2 - M_2^2)^2}{E_0^4},$$

E_0 is the total energy in the c. m. s., $R = \sqrt[3]{\frac{2M\hbar}{E_0\mu_c}}$; M is the nucleon mass, μ is the mass of a π -meson; M_1 and M_2 are the masses of the colliding particles (in the general case $M_i \neq M$ and $M_i \neq \mu$); L is the momentum of the colliding particles; θ is the angle between the vector of the angular momentum L and the incident particle velocity;

$$\theta(x) = 1, \quad \text{when } x \geq 0, \quad \text{and } \theta(x) = 0, \quad \text{when } x < 0.$$

Obviously,

$$\frac{dW(\theta)}{d\Omega} = \frac{dW(\pi - \theta)}{d\Omega}.$$

However, the angular *asymmetry* in the Fermi theory can be obtained in no way. The experimental angular distributions are found to be *very asymmetrical*. For instance, in case of (π^-p) collisions at $E = 6.8$ Bev the ratio of the number of protons emitted in the front half-sphere n_p to that of protons emitted in the back half-sphere n_p (with respect to the velocity vector of the primary π^- -meson) is [4]:

$$A_p \equiv \vec{n}_p / \overleftarrow{n}_p \leq 0.1 \pm 0.1 \ll 1.$$

An analogous ratio charged pions in this case is equal to 1.57 ± 0.1 [4]. These experimental results point out that the collisions are possible when there is no statistical equilibrium between all the generated particles. In these cases a more detailed consideration of the collisions is necessary.

A Model of Central and Peripheral Collisions

An analysis of elastic interactions of different particles with nucleons makes one to think that the matter in the cloud of virtual particles surrounding the centre of the real physical nucleon is distributed very inhomogeneously (non-uniformly); in the central regions its density is much greater than in the periphery. The particles in the central regions of a virtual cloud are considerably stronger bound with each other, than with the particles from the peripheral layers of the cloud [5]. Such a model of a nucleon suggests three types of nucleon-nucleon collisions:

I. The collision between the central nucleon regions, when in a small space volume the major part of the energy of the colliding nucleons is released, and an intensive production of new particles is taking place.

II. The collision of the periphery of one nucleon with the central part another nucleon. So to speak, in this case an "stripping" of the peripheral mesons in a nucleon occurs.

III. The collision between the peripheral regions of the nucleons. Since the density of matter on the periphery is much smaller than in the central regions of a nucleon, such collisions will be considerably rarer than two other types of collisions.

Such a classification of (NN)-collisions was first discussed by D. I. BLOKHINTSEV [6]. This classification, of course, is applicable only for the collisions of high

velocity particles with the wave length λ , much smaller than the dimensions of these particles. Only in this case one can speak about the collision parameter. Practically this holds already for particles with $E \approx 1$ Bev.

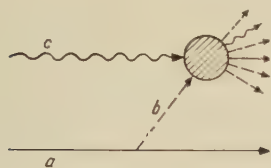


Fig. 4

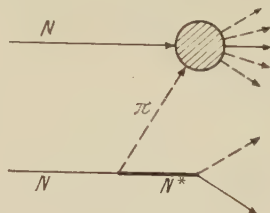


Fig. 5

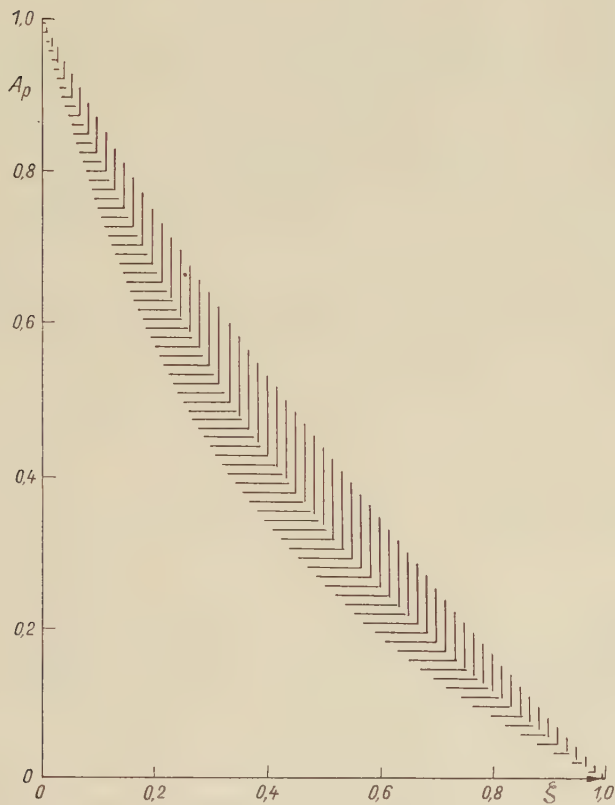


Fig. 6. The angular asymmetry of protons $A_p = \vec{n}_p / n_p^*$ in the c. m. s. of the colliding π^- -meson and proton. The region of possible values A_p is shaded. The horizontal shading is the variant with the isobar, the vertical shading — the variant without the isobar

At present there are also theoretical and experimental indications that the interaction between π -mesons is strong. This means that around the center of the real physical meson there must exist a cloud of virtual π -mesons. Since the π -mesons strongly interact with nucleons, then inside a physical meson there must

also be a cloud of virtual nucleon-antinucleon pairs. It is possible that there exists a cloud of virtual K-particles etc. In other words, a real physical π -meson must have dimensions and intrinsic structure. From the standpoint of this model (πN) collisions may also be divided into three types like (NN) collisions what was done above.

An analogous classification is valid also for the collisions of high velocity particles of other kinds.

The account of peripheral collisions leads to an anisotropy of angular distributions in the c. m. s. of the colliding particles (see Fig. 4). If the angular distribution of particles, generated in the collision of the particles b and c , is close to an isotropic one in the c. m. s. ($b; c$), then in passing to the c. m. s. ($a; c$) this angular distribution will be sharply anisotropic due to the compression of angles in the coordinate transformation.

However, in some cases, e. g., for (pN)-collisions, the angular distribution in the c. m. s. of the colliding particles becomes anisotropic, the asymmetry, however, is not obtained [2]. In [1, 2] it has been shown that the angular asymmetry in this case may be obtained only by assuming that the nucleon which emits the peripheral meson passes into an excited isobaric state, which, in its turn, decays independently (see Fig. 5). An analogous model was suggested by I. E. TAMM [7].

The calculations have show that all the published experimental data on (NN) and (πN)-collisions may be accounted for if the cross section for the peripheral collisions amounts not less than 20%—30% of the total cross sections for all inelastic processes [2, 8]. However, the analysis of more accurate experimental data recently obtained at Dubna on ($\pi^- N$) interactions at $E = 6.8$ Bev (see [4]) shows that the cross section for the peripheral collisions σ_p must be, at any rate, greater than the half of all the inelastic (πN) interactions. This is seen from Fig. 6, where the theoretical angular asymmetry of protons A_p is plotted against the parameter $\xi = \sigma_p/\sigma_{in}$. (Let us remind, that the experimental value is

$$A_p \leq 0,1 \pm 0,1.$$

When $\xi \gtrsim 0.5$ the experimental data on (NN) collisions are in better agreement with the theory, than with $\xi = 0.2 \div 0.3$.

3. Energy Spectrum of Peripheral Mesons in a Quick Nucleon

At present there is a series of preprints whose authors treat different problems of the theory of peripheral collisions. However, this theory is still very incomplete. In particular, for the calculations the energy spectrum of the peripheral mesons in a nucleon is usually used a formula which has been obtained by HEITLER and PENG [9] many years ago. This formula was obtained under the assumption that the meson field in a nucleon is described by the classical expression

$$\varphi(r) \sim \bar{\sigma} \bar{r} \frac{d}{r dr} \frac{e^{-r\mu}}{r}$$

($\hbar = c = 1$; μ is the mass of a π -meson). However, this expression, as was shown in [5] is a very bad approximation in the region $r < 1/\mu$.

It is possible to get a more accurate expression for the energy spectrum of the peripheral mesons [24].

In the general case this spectrum is determined from the comparison of two expressions for the total flux of the meson field energy of the nucleon in a layer with the radius ϱ (see Fig. 7)

$$I(\varrho) = \int_0^\infty \varepsilon q(\varrho; \varepsilon) d\varepsilon \quad (1)$$

and

$$I(\varrho) = 2\pi\varrho \int_{-\infty}^{\infty} S(\varrho; t) dt. \quad (2)$$

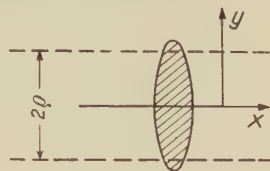


Fig. 7

Here $q(\varrho; \varepsilon)$ is the energy spectrum of mesons at a distance ϱ from the center of a quick nucleon; $S(\varrho; t)$ is the x -th component of the Poyting-Umov vector at the point $x = 0$ at the moment of time t (see Fig. 7). It is easy to show that

$$S = \gamma^2 [\beta (T_{11} - T_{44}) - i(1 + \beta^2) T_{14}],$$

where T_{ik} is the mean value of the component of the meson field energy-momentum tensor in the nucleon coordinate system; $\gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1/2}$; β is the velocity of a nucleon in the Lab. system (parallel to the X -axis).

As we are considering the periphery of a nucleon, then in the first approximation the nucleon recoil may be neglected. In this case for calculating T_{ik} it is possible to apply the CHEW-Low theory [10]. In the one-meson approximation

$$\begin{aligned} q(\varrho; \varepsilon) = & \frac{3}{\pi^2 \gamma^2 \beta^3} \left(\frac{f}{\mu} \right)^2 \varepsilon \left\{ \int_0^\infty \frac{v(p^2 + \varepsilon^2/\gamma^2 \beta^2)}{\omega_p^2} p^2 J_1(p\varrho) dp \times \right. \\ & \times \int_0^\infty \frac{v(q^2 + \varepsilon^2/\gamma^2 \beta^2)}{\omega_q^2} q^2 J_1(q\varrho) dq - \\ & \left. - \int_0^\infty \frac{v(p^2 + \varepsilon^2/\gamma^2 \beta^2)}{\omega_p^2} p J_0(p\varrho) dp \cdot \int_0^\infty \frac{v(q^2 + \varepsilon^2/\gamma^2 \beta^2)}{\omega_q^2} q(q^2 + \mu^2) J_0(q\varrho) dq \right\}, \end{aligned}$$

where J_0 and J_1 are the well-known Bessel functions; $v(\omega^2)$ is the form-factor of the meson field source; $\omega_k^2 = k^2 + \varepsilon^2/\gamma^2 \beta^2 + \mu^2$, μ is the mass of a pion. The total energy spectrum of the peripheral mesons in the nucleon shell with the radius $r \geq R$ is

$$q(\varepsilon) = 2\pi \int_R^\infty \varrho q(\varrho; \varepsilon) d\varrho.$$

Now a numerical calculation of this spectrum is being made by means of an electronic computer.

4. Resonance Interaction of π -Mesons

Another problem which attracts a great deal of attention is the account of the possible resonance ($\pi\pi$) interaction and its influence on the calculations according to the statistical theory. From the theoretical point of view the idea of such an

interaction seems very attractive and plausible. However, all the known experimental data on the multiple production of particles and their energy spectra in (πN) and (NN) collisions are possible to be explained now without taking into account there resonance ($\pi\pi$) interaction. In the framework of the Fermi theory the account of such an interaction makes the calculations much more difficult and does not give a better agreement with the modern experiments. For example it can be seen from Table I and II, where are given the experimental and theoretical data for (π -P) interactions at $E = 5$ Bev and (PP) interactions at 6.2 Bev (experimental data from [11, 12]). The calculations have shon that an analogous situation occurs in (π^-N) collisions at $E = 6.8$ Bev and in (NN) collisions at $E = 9$ Bev¹).

In paper [13] it is stated that such conclusions are obtained because the statistical theory is crude. But this just means that within the accuracy of the present theory and experiment there is no necessity of taking into account the resonance ($\pi\pi$) interaction in the analysis of (πN) and (NN) collisions. This concerns especially the energy region near 1 Bev, where the statistical theory is applicable with reserve.

On the other hand, an account of the resonance interaction of π -mesons considerably improves the agreement of the theory with experiment in case of a slow antinucleon annihilation. This is seen from Table III, where are given the results

Table I.
(π -p) interaction; $E = 5$ BeV

Charakteristic of a collision	Theory			Experiment
	Without account of ($\pi\pi$) inter- action	With account of ($\pi\pi$) inter- action; DYSON'S variant ²)	With account of ($\pi\pi$) inter- action; TAKEDAS' variant ²)	
The number of stars with 2-prongs [in %]	61,5	50	44	60,8 \pm 7,5
„ 4 „ „ „	37	44	51,5	36,4 \pm 5,8
„ 6 „ „ „	1,5	6	4,5	2,8 \pm 1,6
The average number of all charged particles	2,8	3,1	3,2	2,84 \pm 0,48
The average number of all charged and neutral particles	4,2	4,7	5,1	4,3

1) The results of the calculations are close to the data obtained by HAGEDORN and CERULUS, using the Monte-Carlo method [18]. I am grateful to Drs. Hagedorn and Cerulus, who sent me results of their calculations.

2) In DYSON'S variant the spin of a π -meson isobar is $S = 0$; its isotopic spin is $T = 0$. In TAKEDA'S variant $S = 0$; $T = 1$. In both cases the mass of a π -meson isobar was assumed to be equal to three π -meson masses: $\mu^* = 3\mu$; the change of μ^* from 3μ up to 4μ and the spin from $S = 0$ up to $S = 1$ does not strongly affect the results of the calculations.

of the calculations of the stars due to the annihilation of slow antinucleons, as well as are listed corresponding experimental data from [15].

It is also possible to bring into agreement the theory and experiment without resorting to the hypothesis about the resonance ($\pi\pi$) interaction. However, it appears necessary to make some special assumptions, the validity of which is not quite obvious (see, e. g. [14, 15]).

Table II.
(pp) interaction; $E = 6.2$ Bev

Characteristic of a collision	Theory		Experiment
	Without account of ($\pi\pi$) interaction	With account of ($\pi\pi$) interaction ¹⁾	
The number of stars with 2 prongs [in %]	43	26	32,5 \pm 21
„ 4 „ „ „	53	64	53,8 \pm 10,7
„ 6 „ „ „	4	10	11,8 \pm 2,6
„ 8 „ „ „	0,1	0,2	11,3 \pm 11,3
The mean number of neutrons	0,8	0,8	—
„ „ „ „ protons	1,2	1,2	1,6 \pm 0,6
„ „ „ „ π^0 -mesons	1,0	1,2	—
„ „ „ „ π^\pm -mesons	2,0	2,5	1,9 \pm 0,3
„ „ „ „ all charged particles	3,2	3,7	3,5 \pm 0,3
The mean momentum of neutrons (c. m. s. Bev/c)	0,78	0,71	—
The mean momentum of protons (c. m. s. Bev/c)	0,78	0,71	0,77 \pm 0,01
The mean momentum of π^0 -mesons (c. m. s. Bev/c)	0,51	0,41	—
The mean momentum of π^\pm -mesons (c. m. s. Bev/c)	0,51	0,41	0,32
The mean momentum of all charged particles (c. m. s. Bev/c)	0,61	0,52	0,53

¹⁾ The mass of a π -meson isobar μ^* was assumed to be equal to four masses of a π -meson; $\mu^* = 4\mu$; $S = 1$; $T = 1$.

Thus, in the framework of the statistical theory a successive consideration of the resonance ($\pi\pi$) interaction is rather difficult. However, an account of the peripheral collisions changes the situation essentially. In peripheral collisions a somewhat less number of particles is produced than in central collisions (see Table II from [8]). We hope this will compensate the increase of the multiplicity due to the account of the resonance ($\pi\pi$) interaction. This will be clear when detailed numerical calculations are completed.

Table III.
($\bar{N}\bar{N}$)
($\bar{p}p$) interaction

Characteristic of a collision	Theory				Experiment
	Without account of ($\pi\pi$)-inter- action	With account of ($\pi\pi$)-inter- action $\mu^* = 3\mu$; $S = 1$; $T = 1$	With account of ($\pi\pi$)-inter- action $\mu^* = 4\mu$; $S = 1$; $T = 1$		
The number of stars with 2 prongs in [%/%]	79,9	27	45		42 \pm 7,3
„ 4 „ „ „	20	65	52		52 \pm 8,1
„ 6 „ „ „	0,1	8	3		6,3 \pm 2,8
The average number of π^0 -mesons	1,1	1,7	3,1		1,60 \pm 0,50
The average number of π^\pm -mesons	2,2	3,6	1,6		3,06 \pm 0,16
The average number of all charged and neutral particles	3,4	5,3	4,7		4,7 \pm 0,1
The mean momentum of π -mesons (in Bev/c)	was not calculated	0,33	0,35		0,342 \pm 0,05

5. Multiple Production of Strange Particles

At the present time still very incomplete experimental information is available on interactions between strange particles at high energies, and, in particular, on the multiple production of these particles. All what is known is that the cross section for the generation of strange particles is only some percent of the total cross section for all the inelastic processes.

To account for this experimental fact, in paper [16] a statistical model was suggested, where the multiple production of K^- and \bar{K}^- -particles takes place in a smaller space volume than of all other particles. Irrespective of its physical interpretation such an approach has become now generally accepted (see e. g., [17, 18]). At the same time, as more and more experimental data become available, such a simplified approach is no longer satisfactory.

In particular, the calculations on the production of strange particles in the annihilation of slow antinucleons lead to too low values of the cross sections compared with the experimental ones (see, e. g. [17] or [13]). The experiments with (π^-N) interactions performed at Dubna at an energy $E = 6.8$ Bev also indicate that the number of the generated \bar{K}^- -particles is found to be larger than that calculated theoretically under the assumption that \bar{K}^- and K^- -mesons are produced in the same volume with the radius $r_K = \hbar/M_K c = 0.4 \cdot 10^{-13}$ cm, less than that for the production of particles of all other kinds. However, the total cross section for the production of all strange particles is found to be, very likely, somewhat greater than that calculated theoretically at $r_K = 0.4 \cdot 10^{-13}$ cm.

These results indicate, that by this time a more detailed consideration of the mechanism of strange particle multiple production is necessary. The introduction

of a smaller space volume is only a means of the roughly phenomenological account of different strength of the interaction between different particles. This approach is no longer satisfactory.

For a further progress in the theory more detailed experimental data are necessary also.

6. Interaction of Particles at Very High Energies

Cosmic ray experiments allow to study the interactions between particles up to gigantic energies $E \sim 10^9$ Bev. These experiments by their nature may be divided at present into two groups:

1. A study of wide atmospheric showers due to the primary particles from the cosmic space.

2. A study of the tracks of the cosmic particles interaction in the emulsion stacks.

In both these cases to get an idea on the interaction between elementary particles is a very complicated and often an ambiguous problem: in the first case the character of the primary act of the interaction is extremely obscured by the interactions of successive generations of the produced particles; in the second case the interaction of a cosmic particle takes place with a nucleus, and the features of elementary (πN) and (NN) interactions also turn out to be spread. Besides, the statistics of the recorded events is usually poor.

Nevertheless, a detailed analysis of numerous experiments still allows to obtain some conclusions:

1. The cross sections for (πN) and (NN) interactions remain constant, or, at any rate, do not increase up to $E \sim 10^9$ Bev.

2. The total number of secondary particles increases with the energy of the primary cosmic particle E quicker than $E^{1/3}$. At the same time an overwhelming majority of these particles are π -mesons.

3. Among the generated particles there is observed, as a rule, a particle with a very great momentum. Such a particle possesses a large part of the energy of a primary particle. (According to the data of different authors — from 30% up to 70%). In the center-of-mass-system of the colliding particles the transverse momenta of secondary particles are found to be ~ 0.5 Bev/ c irrespective of the emission angle of these particles.

4. The angular distribution of the generated particles in the c. m. s. is sharply anisotropic. At the same time in many analyzed cases the angular distribution is found to be asymmetrical: $A = \frac{\vec{n}}{\overleftarrow{n}} \neq 1$.

To account for the experimental data a hydrodynamical theory of multiple production is usually made use of. Recently, however, other models were suggested (for instance, a model of a "fiery ball" etc.). An analysis of the experimental and theoretical results is given in review [20]. Let us point out to two problems which are of interest in connection with the interpretation of the experiments with the accelerators.

At high energies of the colliding particles an account of the peripheral interactions is of still more importance than at those obtained by accelerators. The asymmetry experimentally observed in the stars $A \neq 1$ and especially the role of one of the secondary particles qualitatively confirm this conclusion. From this standpoint, the results obtained by means of the hydrodynamical theory and in the first turn the calculated angular distributions of secondary particles require a critical treatment.

The second question concerns the interaction of quick particles with nuclei.

At energies up to 10 Bev the experimental data on nucleon and meson interaction with nuclei are in good agreement with the mechanism of the intranuclear cascade. An agreement between the experiment and the theory holds both for light and for heavy nuclei. The calculations have shown [21] that to account for the multiplicity and energy distributions of quick and cascade particles it is sufficient to take into account two collisions in light nuclei, and three collisions in heavy nuclei. The angular distributions of quick particles are found to be close to the experimental ones. To account for the angular distributions of the cascade particles it appeared necessary to take into account one more collision.

At energies $E \gg 10$ Bev both the incident primary particle and the nucleus (in the c. m. s.) are strongly compressed. Therefore, the time of interaction with a nucleus is very short and the perturbation wave has no time to expand in a transverse direction further than by $\hbar/\mu c$. The interaction under these conditions occurs only with the tube of the nuclear matter cut by the primary particle. However, even at very high energies, the mechanism of this interaction, in principle, may be different: either like at lower energies it will be a cascade interaction with separate nucleons, or, as a result of the interaction a unified excited "compound-system" is formed, which further decays into separate particles.

The latter mechanism has been recently investigated in detail in [23]. It has been shown that for the most part the theory agrees qualitatively with experiment. However, a quantitative difference often amounts to 30%—40% and more.

Within experimental error, the results of the measurements may be also brought into agreement with the theory of the intranuclear cascade.

Thus, the mechanism of high energy particle interaction with atomic nuclei remains at present still very obscure. First of all, more careful experimental measurements are needed.

References

- [1] V. S. BARASHENKOV, The material of the 1-st All-Union Inter-University Conference On the Field Theory and the Theory of Elementary Particles, Uzhgorod, 1958.
- [2] V. S. BARASHENKOV, V. M. MALTSEV, E. K. MIHUL, Nuclear Phys. **13**, 583 (1959); V. S. BARASHENKOV, V. M. MALTSEV, Nuclear Phys., (in print); preprint of JINR P-433.
- [3] N. P. BOGACHEV, S. A. BUNYATOV, YU. P. MEREKOV, V. M. SIDOROV, V. A. JARBA, JETP (In print).
- [4] V. A. BELYAKOV, WANG SHU-FENG, V. V. GLAGOLEV, R. M. LEBEDEV, N. N. MELNIKOVA, V. A. NIKITIN, V. V. PETRILKA, V. A. SVIRIDOV, M. SUK, K. D. TOLSTOV, JETP (in print).
- [5] D. I. BLOKHINTSEV, V. S. BARASHENKOV, B. M. BARBASHOV, Uspekhi fiz. nauk, **68**, 417 (1959).
V. S. BARASHENKOV, B. M. BARBASHOV, The materials of the 1-st Conference on the Field theory and the Theory of Elementary Particles, Uzhgorod 1958.
- [6] D. I. BLOKHINTSEV, CERN, Symposium, **2**, 155 (1956).
- [7] I. E. TAMM, The materials of the 9-th Annual Conference on High Energy Physics, Kiev 1959.
- [8] V. S. BARASHENKOV, Nuclear Phys. **15**, 486 (1960).
- [9] W. HEITLER, H. W. PENG, Proc. Ir. Ac., **40**, 101 (1943).
- [10] G. F. CHEW, F. E. LOW, Phys. Rev. **105**, 1570 (1956).
- [11] G. MAENCHEN, W. B. FOWLER, W. M. POWELL, R. W. WRIGHT, Phys. Rev. **108**, 850 (1957).
- [12] R. M. KALBACH, I. I. LORD, C. H. TSAO, Phys. Rev. **113**, 330 (1959).
- [13] V. I. RUSKIN, P. A. UIK, JETP **38**, 929 (1960).

- [14] V. M. MAKSIMENKO, JETP **33**, 232 (1957).
- [15] N. HORWITZ, D. MILLER, I. MURRAY, R. TRIPP, Phys. Rev. **115**, 472 (1959).
E. SEGRÉ, Report at the 9-th International Conference on High Energy Physics, Kiev, 1959.
- [16] V. S. BARASHENKOV, B. M. BARBASHOV, E. G. BUBELEV, V. M. MAKSIMENKO, Nuclear Phys. **5**, 17 (1958).
- [17] E. EBERLE, Nuovo Cimento **8**, 610 (1958).
- [18] R. HAGEDORN, F. CERULUS, preprints of the investigations on the statistical theory.
- [19] DING DA-TSAO, Report at the 9-th International Conference on High Energy Physics, Kiev, 1959.
- [20] Z. Koba, S. TAKAGI, Fortschr. Phys., **7**, 1 (1959).
- [21] V. S. BARASHENKOV, V. M. MALTSEV, E. K. MIHUL, (will be published).
- [22] V. S. BARASHENKOV, V. M. MALTSEV, (will be published).
- [23] G. A. MILEKHIN, A candidate's dissertation; FIAN SSSR, 1959.
- [24] V. S. BARASHENKOV, WAN PENG, preprint JINR P-504.
- [25] M. M. BLOCK, Phys. Rev. **101**, 796 (1956).

Small Angle Elastic Scattering of High Energy Particles¹⁾

V. S. BARASHENKOV

Joint Institute for Nuclear Research

Laboratory of Theoretical Physics, Dubna (USSR)

In theoretical investigations it was pointed out long ago that elastic scattering of high energy mesons and nucleons is an effective means for the study of the intrinsic structure of elementary particles and atomic nuclei (see, e. g. [1-4], where a detailed bibliography is given).

In particular, the small angle measurements allow to get the information on the peripheral interactions of particles.

Some problems associated with the interpretation of the experiment on elastic scattering of quick particles will be treated further.

1. Real Part of Elastic Scattering Amplitude at High Energy

The experimental data obtained recently at Dubna on elastic (pp)-scattering at 8.5 Bev have shown that the model of a purely absorbing nucleon so far widely used is too rough and as it seems, cannot account for all the experimental results. The magnitude of elastic scattering cross section at zero angle $\theta = 0$ from [5] greatly exceeds the value obtained by using an optical model (assuming that the total cross-section for (pp)-interaction at 8.5 Bev $\sigma \approx 30 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$ [5]). The experimental data may be formally accounted for by assuming that the real part of the elastic scattering amplitude $D(E)$ at $\theta = 0$ is different from zero and by the module is equal approximately to $3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ (in c. m. system). An unexpected and surprising result is that $D(E)$ takes on so great values at $E \gg 1 \text{ Bev}$. In this connection a theoretical investigation of the behaviour of $D(E)$ at high energies is of great interest.

In [6] it has been shown that at $E \rightarrow \infty$ $D(E)$ increases at any rate more slowly than $E \ln E$. However, it is possible to obtain more definite conclusions about the behaviour of $D(E)$ at high energies.

To this end we put the elastic scattering cross-section σ_{el} as:

$$\begin{aligned} \sigma_{el} = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |1 - \beta_l e^{2i\delta_l}|^2 = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - \beta_l)^2 + \\ + 4\pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \beta_l \sin^2 \delta_l \equiv \Sigma_1 + \Sigma_2 . \end{aligned}$$

¹⁾ A review at the All-Union Inter-University Conference on the Field Theory and the Theory of Elementary Particles, Uzhgorod, 1960.

Here the first term is wholly due to inelastic processes ($\beta_l \neq 1$) and is a cross-section of a purely diffraction scattering.

The second term depends upon the non-diffraction scattering.

When $E \gg 1$

$$\Sigma_2 \approx 8\pi\lambda^2 \int_0^\infty \beta_l l \delta_l^2 dl = \text{const. } \beta(E) \cdot \delta^2(E),$$

where $\varrho = \lambda l = l/E$ is the collision parameter, whereas $\beta(E)$ and $\delta(E)$ are values of the functions in the range where the nuclear forces act.

Since at high energies all the scattering becomes a purely diffraction one, then $\beta(E) \rightarrow \text{const.}$ and $\delta(E) \rightarrow 0$. It follows from here, that

$$D(E) = 2\lambda \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \beta_l \sin 2\delta_l \approx \text{const. } E \cdot \delta(E) \quad (1)$$

increases at any rate, more slowly than E .

This result means that in the dispersion relation for $D(E)$ all the term, whose degree of increasing greater or equal to E , must vanish. From here it follows that in the particular case of elastic scattering of pions on nucleons

$$D_-^0 - D_+^0 - \frac{4f^2}{\mu} + \frac{\mu}{2\pi^2} \int_{\mu}^{\infty} \frac{dE}{k} [\sigma_+(E) - \sigma_-(E)] = 0, \quad (2)$$

where $D_{\pm}^0 \equiv D_{\pm}(\mu)$; μ is the pion mass; $k = \sqrt{E^2 - \mu^2}$; σ_{\pm} are the total cross-sections for π^{\mp} -meson interaction with protons [7].

Making use of the experimental values of the cross-sections σ_{\pm} from relation (2) it is possible to determine the value of the meson-nucleon coupling constant f^2 by means of the statistical analysis. The calculations have shown that¹⁾

$$f^2 = 0.08 \pm 0.005.$$

In case of elastic nucleon-nucleon scattering the relation analogous to (2) is of the form

$$\begin{aligned} D_+^0 - D_-^0 - 2f^2 \frac{M}{\mu} + \frac{1}{2\pi^2} \frac{M}{\mu} i \int_0^M \frac{dE}{k} [\sigma_-(E) - \sigma_+(E)] + \\ + \frac{1}{2\pi^2} \frac{M}{\mu} \int_M^{\infty} \frac{dE}{k} [\sigma_-(E) - \sigma_+(E)] = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

where $D_{\pm}^0 \equiv D_{\pm}(M)$; M is the nucleon mass; $k = \sqrt{E^2 - M^2}$; σ_{\pm} are the total cross-sections for (pp) and ($\bar{p}p$) interactions.

¹⁾ In [9] from an analysis of relation (1) the value $f^2 = 0.082 \pm 0.008$ has been obtained what is in good agreement with our result. I am grateful to the author of paper [9] for making the result available.

With the help of this relation it is possible to estimate the value of the cross-sections $\sigma_{\pm}(E)$ in the non-physical region.

It is extremely important to take into account equalities (2) and (3) in the calculations of the values $D_{\pm}(E)$. If one fails to subtract these equalities from the corresponding dispersion relations for elastic (πN)- and (NN)-scattering, then even a small inaccuracy in the experimental data, because of which the left-hand side of equalities (2) and (3) will be different from zero by a very small magnitude α , will make a contribution $\Delta D_{\pm} \sim \alpha \cdot E$ to $D_{\pm}(E)$. At high energies this contribution may be much greater than the real values of $D_{\pm}(E)$.

2. Elastic Scattering of π -Mesons on Nucleons

In Fig. 1 are given the values of D_{\pm}^0 calculated from the dispersion relations. As is seen, at high energies the real part of the elastic scattering amplitude is independent of the isotopic spin and equals in the lab. system to the constant value

$$D_{\pm} \approx -0.35 \cdot 10^{-13} [\text{cm}].$$

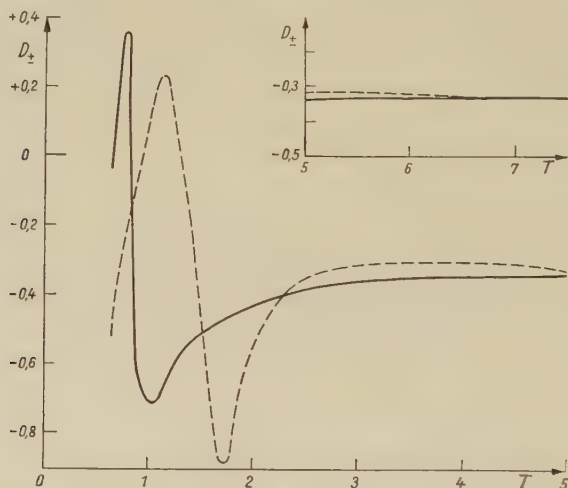


Fig. 1. Energy dependence of the real part of the elastic scattering amplitude of a π^- -meson on a proton $D_-(T)$ (solid curve) and of a π^+ -meson on a proton $D_+(T)$ (dashed line). Lab. system. The values of the kinetic energy T are given in the units of BeV; the values of $D_{\pm}(T)$ in the units of 10^{-13} cm. The inaccuracy of the values of $D_{\pm}(T)$ due to the errors in the values of D_{\pm}^0 and f^2 is $\Delta D_{\pm} \approx 0.04$

From the expansion of a dispersion relation in powers of E follows the analytical expression for this limiting value

$$D_{\pm} = \frac{1}{2} (D_{\pm}^0 + D_{\pm}^0) + \frac{f^2}{M} - \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mu}^{\infty} \frac{E dE}{k} [\sigma_+(E) + \sigma_-(E)] + \frac{a\sigma}{2\pi^2}, \quad (4)$$

¹) The numerical calculations have been made at the Computing Centre of the USSR Academy of Sciences by means of electronic computer "Strela", the program being prepared by I. Kukhtina.

where the constant a is determined by the condition $\sigma_+ = \sigma_- = \sigma$, when $E \geq a$ (See in more details [7]).

In the c. m. s. $D_{\pm}(E) \equiv D_{\pm}^c(E)$ is equal to

$$D_{\pm}^c(E) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 \cdot \lambda_N} \cdot \frac{\mu}{E} D_{\pm}(E) \approx -\frac{0,23}{\sqrt{E}} \cdot 10^{-13} [\text{cm}]. \quad (5)$$

(Here $\lambda_N = \frac{\mu}{M} \lambda_0 = 2.1 \cdot 10^{-14} \text{ cm}$).

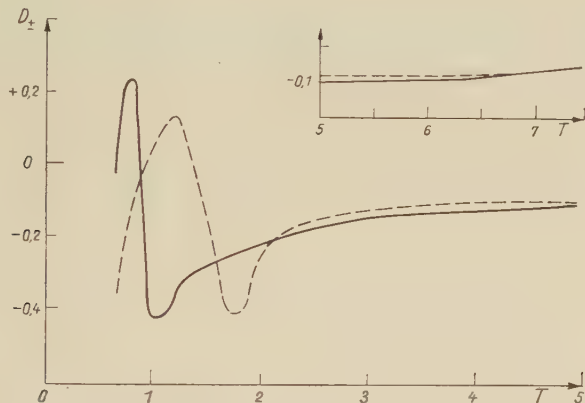


Fig. 2. The same as in Fig. 1. Centre-of-mass system

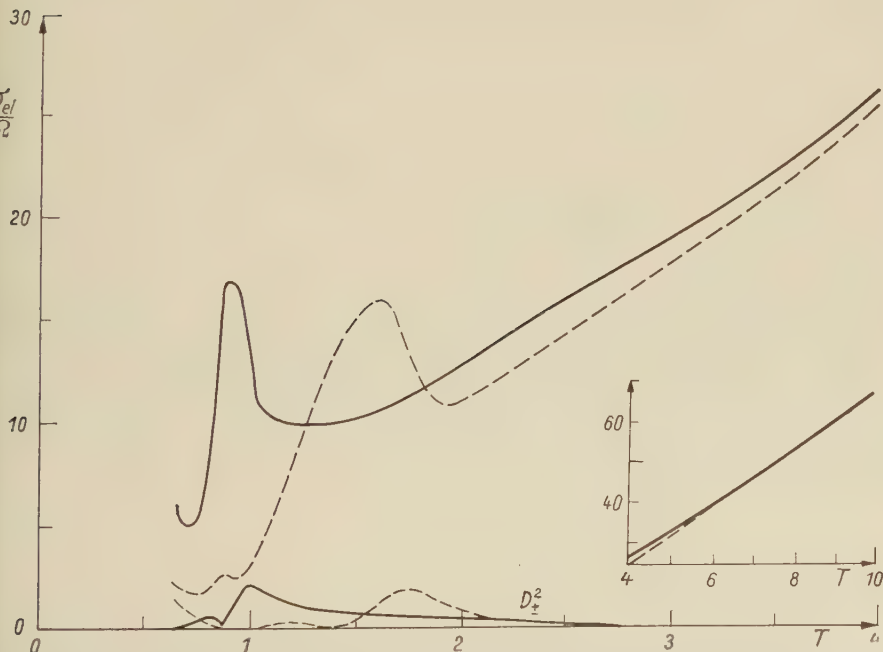


Fig. 3. Differential cross section for elastic scattering of π -mesons on nucleons at zero angle in the c. m. s.: $d\sigma/d\Omega = I^2 + D^2$. The values of the contribution of the real part of the amplitude D^2 are given. Solid curves — $(\pi^- p)$; dashed curves — $(\pi^+ p)$. The values of $d\sigma/d\Omega$ and D^2 are given in the units 10^{-27} cm^2 ; the values of the kinetic energy T in BeV

As is seen, $D_{\pm}^{\circ}(E)$ decreases with the energy increase. The calculated values of D_{\pm}° are presented in Fig. 2. In Fig. 3 are given the corresponding values of the differential cross section $d\sigma_{\text{el}}/d\Omega$ at the angle $\theta = 0$.

We see that at $E \gg 1$ Bev $D_{+}^{\circ}(E) \ll d\sigma/d\Omega$ and $d\sigma_{+}/d\Omega \approx (E\sigma_{+}/4\pi)^2$ in contrast to the results for (pp)-scattering [5].

In the calculations for $E > 1$ Bev the values of the cross-sections from [11] have been used.

3. Elastic Scattering of Nucleons and Antinucleons on Nucleons

Like for (πN) -interaction, the values of D_{\pm} at high energies become constant:

$$D_{\pm} = \frac{1}{2} (D_{\pm}^0 + D_{\pm}^{\circ}) - \frac{2M^2 - \mu^2}{2M\mu} - \frac{1}{2\pi^2} \frac{M}{\mu} i \int_0^M dE \frac{E}{k} [\sigma_{+}(E) + \sigma_{-}(E)] - \\ - \frac{1}{2\pi^2} \frac{M}{\mu} \int_M^a dE \frac{E}{k} [\sigma_{+}(E) + \sigma_{-}(E)] + \frac{\sigma \cdot a}{2\pi^2} \frac{M}{\mu}, \quad (6)$$

where the constant a is determined by the condition $\sigma_{+} = \sigma_{-} = \sigma$, when $E \geq a$. However, in this case two circumstances made the numeral calculation of more difficult:

a) The unknown values of the cross-section $\sigma_{+}(E)$ in the non-physical region $E \in [0; M]$ enter the dispersion relation. (M is the nucleon mass.)

b) The experimental values of the $(N\bar{N})$ -interaction total cross section is known only up to the energies $E = 3$ Bev. (E is the total energy.)

Nevertheless, in the region of high energies $E \gg M$ in this case also one can draw a conclusion about the magnitude of $D_{\pm}(E)$.

The values of σ_{-} experimentally unknown at $E > 3$ Bev may be obtained by extrapolating the values σ_{-} , known at lower energies, taking into account at the same time that at high energies the equality $\sigma_{-} = \sigma_{+}$ must be fulfilled. As the calculations have shown, the errors which are possible at such an extrapolation do not strongly change the magnitude of (pp)-scattering amplitude.

Taking relation (3) into account, it is easy to see that at $E > M$ with an accuracy up to the terms $O[\alpha(M/E)]$, where $\alpha < 1$, the contribution of the non-physical region reduces to the constant:

$$k^2 \int_0^M \rightarrow \text{const} + O[\alpha(M/E)]. \quad (7)$$

The sign and the numeral value of this constant may be determined from the two experiments at certain fixed energies $E_1 \gg M$ and $E_2 \gg M$; (e. g. at energies 8.5 Bev and 6.15 Bev, where the experimental date are in preparation in Dubna and Sophy).

Fig. 4 represents the results of the numeral calculations of the real part of (pp) elastic scattering amplitude

$$D_+(E) = \text{const} + \frac{1}{80\pi^2\mu^2} p \int_M^\infty \frac{dE'}{\sqrt{E'^2 - M^2}} \left[\frac{\sigma_+(E')}{E' - E} (EE' - M^2) - \frac{\sigma_-(E')}{E' + E} (EE' + M^2) \right]. \quad (8)$$

(The values of M ; μ , E are given here in BeV; the values of σ_\pm in the units of 10^{-27} cm^2 , the values of D_+ in the units of 10^{-13} cm). In the calculations for $E > 1 \text{ BeV}$ the values of the cross-sections σ_\pm from [11] have been used.

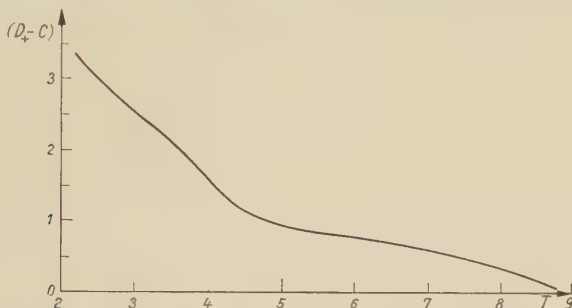


Fig. 4. Energy dependence of the real part of the elastic (pp) scattering amplitude $D_+(T)$. Lab. system. The values of the kinetic energy T are given in BeV; the values of $D_+(T)$ — in the units of 10^{-13} cm . C is a constant

At kinetic energy $T = 8.5 \text{ BeV}$ $d\sigma_{\text{el}}(0)/d\Omega \sim 130 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$ (in the centre of mass system) [5, 6].

From Fig. 4 it follows, that at $T = 8.5 \text{ BeV}$ $(D_+ - C) = 0.1 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$.

Then

$$C = 0.1 \cdot 10^{-13} \pm \frac{\lambda_c}{\lambda} \sqrt{\frac{d\sigma_{\text{el}}(0)}{d\Omega} - \left(\frac{\sigma_+}{4\pi\lambda_c}\right)^2} = (0.1 \pm 12.6) \cdot 10^{-13} \text{ cm} \approx \pm 13 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Here $\sigma_+ = 30 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$ [5, 12] $\lambda_c = 0.99 \cdot 10^{-14} \text{ cm}$ and $\lambda = 0.211 \cdot 10^{-14} \text{ cm}$ are wave lengths in the c. m. s. and in the labor. system.

We can discriminate between two obtained values of C if we compare these values with the experimental magnitudes of $d\sigma_{\text{el}}(0)/d\Omega$ at $T \neq 8.5 \text{ BeV}$, or if we analyse the interference of nuclear and Coulomb scattering by very small angles.

From the point of view of dispersion relation (8) a disagreement between the values of the constant C defined at $T = 8.5 \text{ BeV}$ and $T \neq 8.5 \text{ BeV}$ would imply that the experimental values of $d\sigma(0)/d\Omega$ or σ_+ , used for the calculation of C , are not accurate.

4. Phenomenological Analysis of Elastic Scattering of High Energy Particles

The amplitude of elastic scattering is represented in this case as an expansion in Legendre polynomials

$$A(\theta) = \frac{\lambda i}{2} \sum_{l=0}^N (2l+1) (1 - e^{2im_l}) P_l(\cos \theta) \quad (9)$$

with the complex phases η_l which are determined from the comparison with experiment. The number of the expansion terms N is determined by the dimension R of the spatial region which we intend to investigate. At high energies, where the wavelength of the scattered particle is $\lambda \ll R$, $N = R/\lambda$. The complex refraction coefficient $\kappa(r) = n(r) + ik(r)$ is connected with the phase η_l by the integral equation

$$\eta(\varrho) = \int_0^\infty \kappa(\sqrt{\varrho^2 + s^2}) ds, \quad (10)$$

where $\varrho = \lambda \sqrt{l(l + 1/2)} \approx \lambda l$ (see in more detail [4]).

This equation proves to be especially useful in the study of the interaction of high energy particles with nuclei, since in this case the analytical form of the function

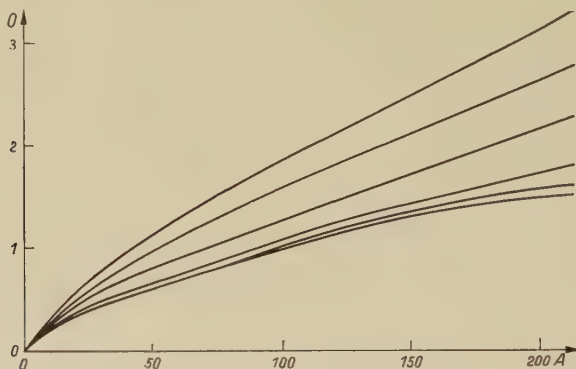


Fig. 5. The cross section for interaction of high energy nucleons with nuclei. Three upper curves are the total cross sections σ_t for the energies 1; 5; 10 BeV (from above to below). Three lower curves are the cross sections for inelastic interactions σ_{in} for 1; 5; 10 BeV (from above to below). The values of the cross sections are given in the units of 10^{-24} cm². A is the atomic weight of nuclei

$\kappa(r)$ is known from the experiments on quick electron scattering on nuclei. In Fig. 5 are given the values of the cross sections for high energy nucleon interaction with nuclei calculated by using relation (10). These values agree well with the experimental data known for $E = 1.4; 2.8; 4.5$ BeV.

In case of interaction of elementary particles an inverse problem has to be usually solved: by the values of η_l known experimentally it is necessary to determine the values $\kappa(r)$. In paper [1], to solve this problem a numerical method was applied. However, it is possible also to get an analytical solution since equation (10) reduces to the integral equation of Abel type by substituting the variable $\varrho^2 = t$ and $s^2 = u - t$. The solution of this equation is as follows¹⁾

$$\kappa(\varrho) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{d\varrho^2} \int_{\varrho^2}^{\infty} \eta(r) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}}. \quad (11)$$

The results of the numerical calculations of the coefficients are given in papers [1-5; 8].

¹⁾ Formula (11) was independently obtained also by the workers of the Budapest Physical Institute DOMOKOS and SEBASTYAN [9]. I am grateful to Domokos who communicated the results of his investigations unpublished yet.

References:

- [1] D. I. BLOKHINTSEV, V. S. BARASHENKOV, V. G. GRISHIN, *Nuovo Cimento* **9**, 249 (1958).
- [2] D. ITO, S. MINAMI, H. TANAKA, *Nuovo Cimento* **9**, 208 (1958).
- [3] G. DOMOKOS, "High energy pion-nucleon scattering and nucleon structure" (to be published).
G. DOMOKOS, "On the real part of the high energy nucleon-nucleon scattering amplitude" (to be published).
- [4] D. I. BLOKHINTSEV, V. S. BARASHENKOV, B. M. BARBASHOV, *Uspekhi fiz. nauk* **68**, 417 (1959).
- [5] V. B. LUBIMOV, P. K. MARKOV, E. N. TSYGANOV, TSEN PUN-IN, M. G. SHAFRANOVA, *JETP* (in press).
- [6] P. K. MARKOV, E. N. TSYGANOV, M. G. SHAFRANOVA, B. A. SHAKHBASAN, preprint JINR D-452.
- [7] S. Z. BELENKI, *JETP* **33**, 1248 (1957).
I. J. POMERANTSHUK, *JETP* **34**, 725 (1958).
- [8] V. S. BARASHENKOV, HINGH DIN CHAN, *Dokladi* (in press).
- [9] G. DOMOKOS, A. SEBASTYAN, "Explicit Solution of the inversion problem in a phenomenological optical model" (to be published).
- [10] T. D. SPEARMAN, "The pion-nucleon coupling constant", preprint, 1960.
- [11] V. S. BARASHENKOV, preprint JINR P-509.
- [12] N. P. BOGATSHEV, S. A. BUNJATOV, I. M. GRAMENITSKI, V. P. LJUBIMOV, JU. P. MERKOV, M. I. PODGORETSKI, V. M. SIDOROV, D. TUVDENDORG, *JETP* **37**, 1255 (1959).

Druckfehlerberichtigung zu der Arbeit

S. GASIOROWICZ, The Application of Dispersion Relations in Quantum Field Theory
in „Fortschr. Phys. 8, 665—726 (1960)“

S. 674, Formel (4.2):

Der Nenner muß lauten $n_q n_p N_n V^{1+1/2n}$ statt $n_p n_p N_n V^{1+1/2n}$

S. 705, 11te Zeile von oben (Formeln nicht gezählt)

muß es heißen $1/(M^2 - u)$ statt $1/M^2 - u$

12te Zeile von oben

muß es heißen $-m^2 + 9m^4/(4M^2 + 8m^2)$ statt $-m^2 + qm^4/(4M^2 + 8m^2)$

Herausgeber: Prof. Dr. Rudolf Ritschl und Prof. Dr. Robert Rompe; Manuskripte sind zu richten an die
Schriftleitung: Dr. E. A. Niekisch, II. Physikalisches Institut der Humboldt-Universität Berlin, Berlin N 4,
Hessische Str. 2. Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin W 8, Leipziger Str. 3-4, Fernruf: 220441, Telex-
Nr. 011773. Postscheckkonto: Berlin 35021. — Die Zeitschrift „Fortschritte der Physik“ erscheint monatlich;
Bezugspreis dieses Heftes DM 6,—. Bestellnummer dieses Heftes: 1027/9/1. — Satz und Druck: Druckhaus
„Maxim Gorki“, Altenburg, Bez. Leipzig, Carl-von-Ossietzky-Str. 30-31. — Veröffentlicht unter der Lizenz-
nummer ZLN 5028 des Ministeriums für Kultur, Hauptverwaltung Verlagswesen. Printed in Germany.

Aus dem Inhalt der folgenden Hefte:

P. MITTELSTAEDT: Quantenlogik

M. KATO and G. TAKEDA: The Level Structure and Electromagnetic Structure of the Nucleon

J. RANFT: Die Theorie hochaufgelöster Kerninduktionssignale

Zur Physik und Chemie der Kristallphosphore

Tagung der Physikalischen Gesellschaft in der Deutschen Demokratischen Republik vom 26.—29. April 1959 in Greifswald

Herausgegeben von der Physikalischen Gesellschaft in der Deutschen Demokratischen Republik

Verantwortliche Redakteure:

Prof. Dr. H. Witzmann und Dr. Ortmann

1960. 326 Seiten — 250 Abbildungen — 6 Tafeln — 50 Tabellen
Ganzleinen DM 58,—

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

FORTSCHRITTE DER PHYSIK

HERAUSGEGEBEN IM AUFTRAGE DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
IN DER DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK

von *Rudolf Ritschl* und *Robert Rompe*

2. SONDERBAND

Künstliche Erdsatelliten

Übersetzung aus dem Russischen

Deutsche Redaktion durch Prof. Dr. H. REICHARDT und Dr. E. A. NIEKISCH

unter Mitwirkung von J. AUTH, L. JANTSCHER, H. MEYER,

E. SCHMUTZER, G. SCHWARTZE, O. SINGER, H. STILLER

und R. SULANKE

1959. 357 Seiten — 148 Abbildungen, davon 4 auf 4 Tafeln — 31 Tabellen — gr. 8° — DM 38,—

Im 2. Sonderband der „Fortschritte der Physik“ sind 21 Arbeiten sowjetischer Physiker über künstliche Erdsatelliten enthalten. So werden z. B. das Hinaufbringen eines Satelliten auf seine Bahn, seine Lebensdauer, Bahnstörungen, der Einfluß geophysikalischer Faktoren sowie Probleme des Fluges zum Mond behandelt. Weitere Arbeiten beschäftigen sich mit Messungen, die mit Hilfe von künstlichen Erdsatelliten durchgeführt werden, z. B. Messungen der Zusammensetzung und Variation der kosmischen Strahlung, der Korpuskular- und kurzwelligen UV-Strahlung der Sonne, Druck und Dichtemessungen der Atmosphäre, deren Zusammensetzung, Messungen der Ionenkonzentration, der festen Komponente (Meteoriten), des elektrostatischen und des geomagnetischen Erdfeldes. Zwei weitere Arbeiten befassen sich mit den Fragen der Energieversorgung sowie der Anwendung von künstlichen Erdsatelliten zur Nachprüfung der allgemeinen Relativitätstheorie. Ausführlich werden die Meßmethoden besprochen und die Apparaturen beschrieben, die in den künstlichen Erdsatelliten eingebaut sind. Alle diese Arbeiten vermitteln ein eindrucksvolles Bild von der Vielseitigkeit der physikalischen Probleme, die im Zusammenhang mit künstlichen Erdsatelliten auftreten.

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN